Aritmética
Aritmética
Intelectum
EVOLUCIÓN

Indicadores de logro

Unidad 1

- Reconoce proposiciones simples y compuestas, define cada conectivo lógico y los analiza dentro de esquemas moleculares.
- Utiliza las distintas leyes proposicionales para determinar proposiciones lógicas equivalentes, y reconoce y analiza los circuitos lógicos.
- Utiliza tablas de verdad para resolver proposiciones lógicas.
- Utiliza la simbología correctamente para determinar inclusión y pertenencia.
- Utiliza las leyes del álgebra de conjuntos y además las representa gráficamente.
- Entiende la clasificación de conjuntos (conjunto finito, infinito, vacío, unitario, universal y potencia).
- Determina conjuntos por extensión y comprensión.
- Analiza el algoritmo utilizado para cambio de base e interpreta los resultados.
- Identifica correctamente las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números enteros positivos.

Unidad 2

- Evalúa los diferentes criterios de la divisibilidad.
- Demuestra los diferentes criterios de divisibilidad haciendo uso de las propiedades del principio de multiplicidad.
- Discrimina entre números simples y compuestos.
- Determina números primos entre si y utiliza el teorema fundamental de la aritmética.
- Analiza el algoritmo para determinar el MCM y el MCD.
- Reconoce números primos basados en la descomposición canónica relacionada con los divisores simples y compuestos.
- Aplica de manera correcta el algoritmo del MCM y MCD en la resolución de problemas.
- Discrimina las distintas propiedades de los números racionales y define al número racional.
- Analiza la aplicación de razones y proporciones en la resolución de enunciados.
- Determina la razón o proporción entre números naturales.

LA SECCIÓN ÁUREA

La sección áurea es simplemente una proporción concreta la cual ha desempeñado un importante papel en los intentos de encontrar una explicación matemática a la belleza, de reducir esta a un número, de encontrar "la cifra ideal". Esta es una proporción que aparece entre los segmentos de una recta al dividir esta en media y extrema razón, es decir, si se tiene una recta AB dividida por un punto F en otros dos segmentos AF y FB, donde AF > FB, el segmento mayor es al menor, como el todo es al mayor.

Esta proporción o forma de seccionar proporcionalmente una línea se llama proporción áurea.

"El Hombre de Vitruvio" es un dibujo realizado por Leonardo da Vinci alrededor del año 1492 en uno de sus diarios, acompañada de notas anatómicas. Es un dibujo en lápiz y tinta; y mide 34,2 x 24,5 cm. En ella se muestra una figura masculina desnuda en dos posiciones superpuestas de brazos y piernas que se inscriben en un cuadrado y círculo. En dicho dibujo se describen, de forma general, las proporciones del cuerpo humano.

Contenido:

Unidad 1

- **Lógica proposicional.**
- **Teoría de conjuntos.**
- **Numeración.**
- **Operaciones básicas en el conjunto $\mathbb{Z}^+$.**

Unidad 2

- **Teoría de la divisibilidad**
- **Números primos - Máximo común divisor y Mínimo común múltiplo.**
- **Fracciones.**
- **Razones y proporciones.**

Unidad 3

- **Magnitudes proporcionales.**
- **Regla de tres.**
- **Porcentajes.**
- **Mezcla.**

Unidad 4

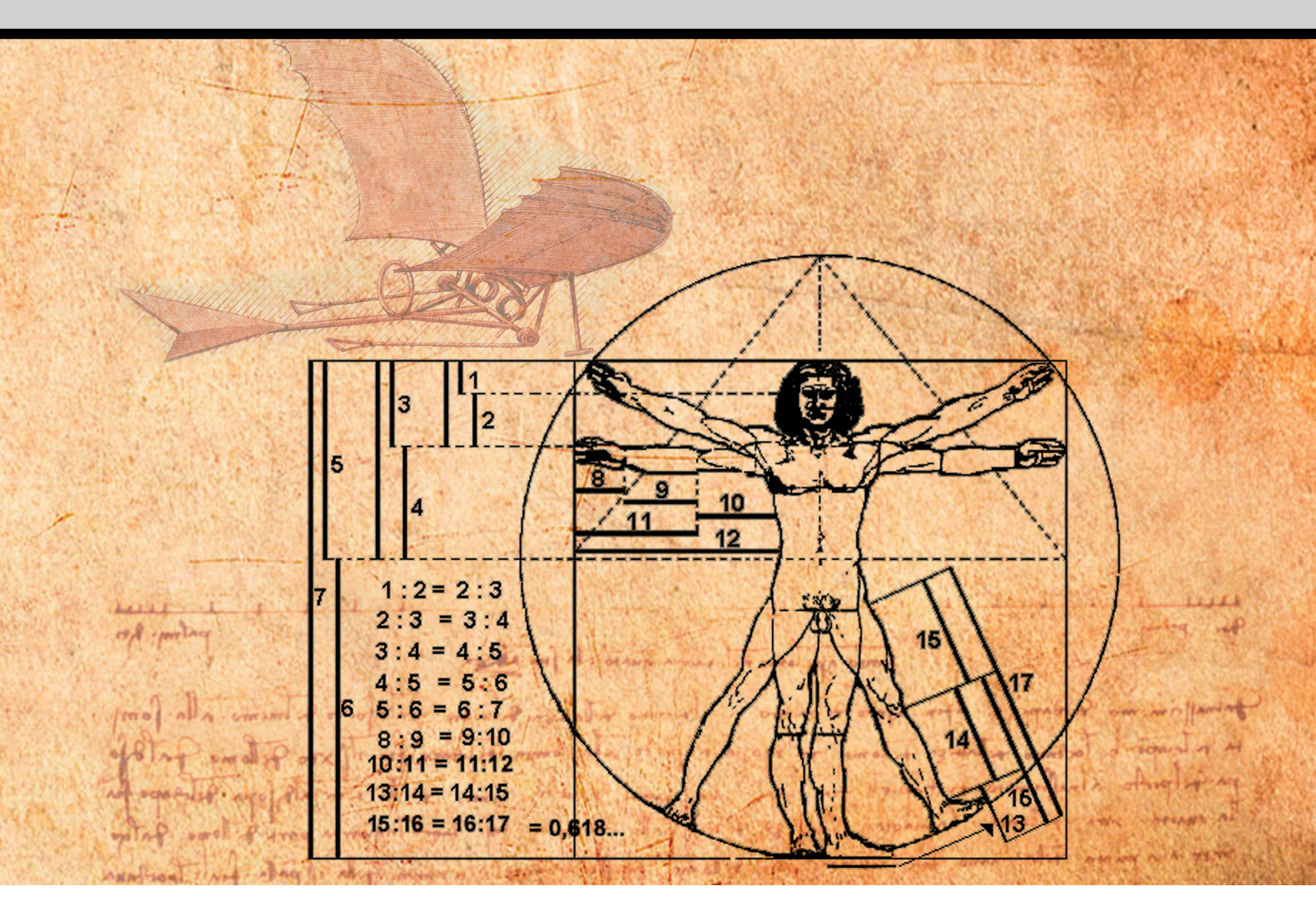
- **Interés.**
- **Estadística.**
- **Teoría combinatoria.**
- **Probabilidad.**

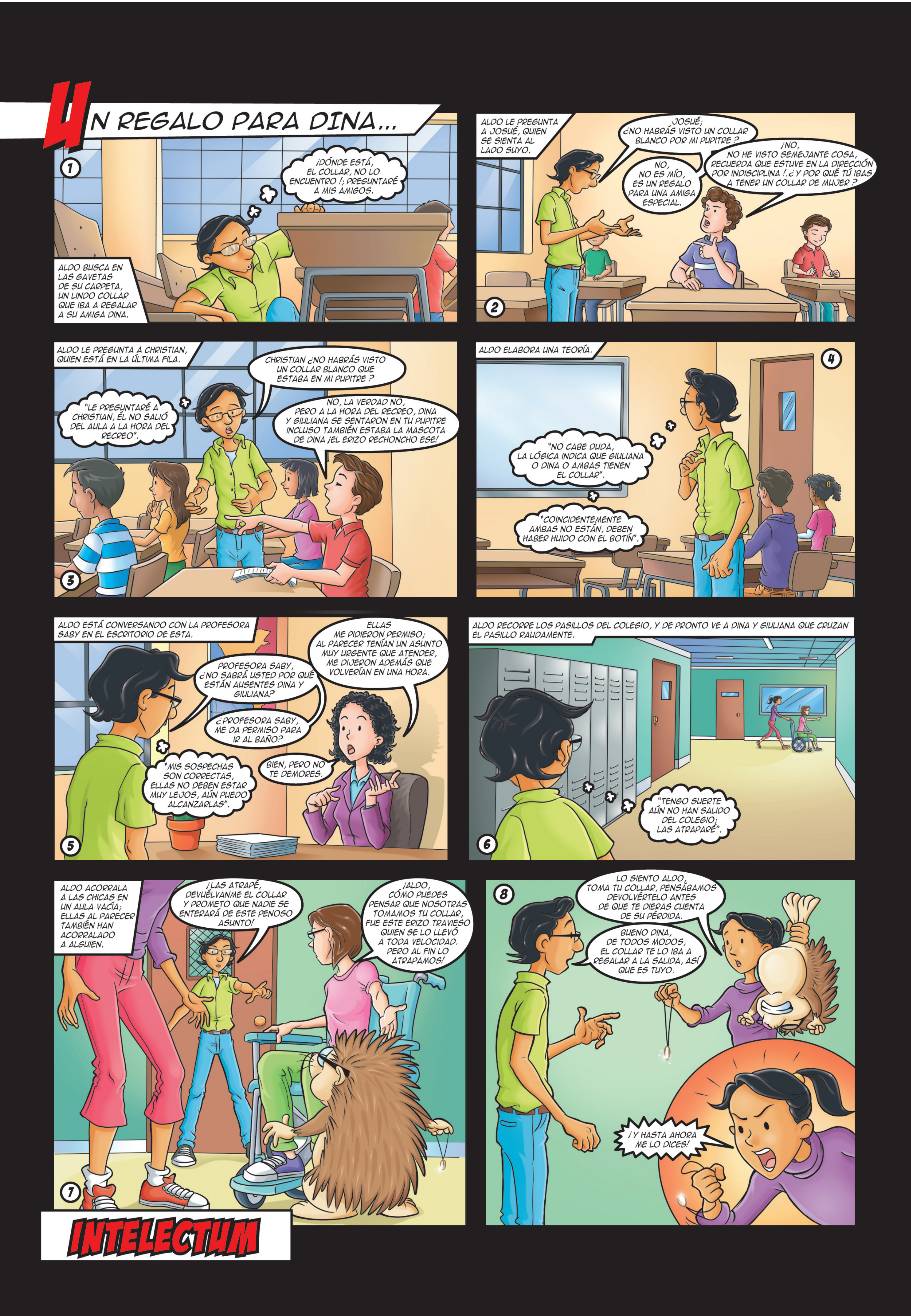
Unidad 3

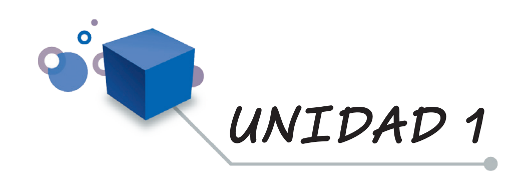
- Discrimina entre magnitudes inversamente y directamente proporcionales, además evalúa sus propiedades.
- Representa la información de una proporción y la explica utilizando un gráfico lineal.
- Analiza la aplicación del reparto proporcional simple y compuesto.
- Aplica la definición de reparto proporcional simple y compuesto en enunciados.
- Identifica y discrimina entre la aplicación de la regla de tres inversa y directa.
- Aplica la definición de regla de tres simple directa e inversa, y compuesta.
- Evalúa los casos de aumentos y descuentos sucesivos.
- Evalúa los datos disponibles en la aplicación de aumentos y descuentos sucesivos.
- Analiza la clasificación de una mezcla (directa e inversa).

Unidad 4

- Analiza cada uno de los elementos del interés y sus principios de aplicación.
- Calcula el interés de cantidades en diversos casos aplicativos.
- Evalúa y ordena conjuntos de datos utilizando cuadros estadísticos.
- Determina el valor de los diversos elementos en una tabla de distribución y las distintas medidas de tendencia central.
- Analiza las técnicas de conteo, el principio de multiplicación y el de adición.
- Aplica las técnicas de conteo en un conjunto de datos y utiliza la definición de permutación y combinación en distintos casos.
- Identifica los diferentes espacios muestrales en el cálculo de las probabilidades.
- Efectúa problemas de probabilidades utilizando las reglas de adición y multiplicación.
- Resuelve problemas aplicando interés simple y compuesto.




UN REGALO PARA DINA...
1
ALDO BUSCA EN LAS GAVETAS DE SU CARPETA, UN LINDO COLLAR QUE IBA A REGALAR A SU AMIGA DINA.
¡DÓNDE ESTÁ, EL COLLAR, NO LO ENCUENTRO !; PREGUNTARÉ A MIS AMIGOS.
2
ALDO LE PREGUNTA A JOSUÉ, QUIEN SE SIENTA AL LADO SUYO.
JOSUÉ; ¿NO HABRÁS VISTO UN COLLAR BLANCO POR MI PUPITRE ?
¡NO, NO HE VISTO SEMEJANTE COSA, RECUERDA QUE ESTUVE EN LA DIRECCIÓN POR INDISCIPLINA !. ¿Y POR QUÉ TÚ IBAS A TENER UN COLLAR DE MUJER ?
NO, NO ES MÍO, ES UN REGALO PARA UNA AMIGA ESPECIAL.
3
ALDO LE PREGUNTA A CHRISTIAN, QUIEN ESTÁ EN LA ÚLTIMA FILA.
"LE PREGUNTARÉ A CHRISTIAN, ÉL NO SALIÓ DEL AULA A LA HORA DEL RECREO".
CHRISTIAN ¿NO HABRÁS VISTO UN COLLAR BLANCO QUE ESTABA EN MI PUPITRE ?
NO, LA VERDAD NO, PERO A LA HORA DEL RECREO, DINA Y GIULIANA SE SENTARON EN TU PUPITRE INCLUSO TAMBIÉN ESTABA LA MASCOTA DE DINA ¡EL ERIZO RECHONCHO ESE!
4
ALDO ELABORA UNA TEORÍA.
"NO CABE DUDA, LA LÓGICA INDICA QUE GIULIANA O DINA O AMBAS TIENEN EL COLLAR".
"COINCIDENTEMENTE AMBAS NO ESTÁN, DEBEN HABER HUIDO CON EL BOTÍN".
5
ALDO ESTÁ CONVERSANDO CON LA PROFESORA SABY EN EL ESCRITORIO DE ESTA.
PROFESORA SABY, ¿NO SABRÁ USTED POR QUÉ ESTÁN AUSENTES DINA Y GIULIANA?
ELLAS ME PIDIERON PERMISO; AL PARECER TENÍAN UN ASUNTO MUY URGENTE QUE ATENDER, ME DIJERON ADEMÁS QUE VOLVERÍAN EN UNA HORA.
¿PROFESORA SABY, ME DA PERMISO PARA IR AL BAÑO?
BIEN, PERO NO TE DEMORES.
"MIS SOSPECHAS SON CORRECTAS, ELLAS NO DEBEN ESTAR MUY LEJOS, AÚN PUEDO ALCANZARLAS".
6
ALDO RECORRE LOS PASILLOS DEL COLEGIO, Y DE PRONTO VE A DINA Y GIULIANA QUE CRUZAN EL PASILLO RAUDAMENTE.
"TENGO SUERTE AÚN NO HAN SALIDO DEL COLEGIO; LAS ATRAPARÉ".
7
ALDO ACORRALA A LAS CHICAS EN UN AULA VACÍA; ELLAS AL PARECER TAMBIÉN HAN ACORRALADO A ALGUIEN.
¡LAS ATRAPÉ, DEVUÉLVANME EL COLLAR Y PROMETO QUE NADIE SE ENTERARÁ DE ESTE PENOSO ASUNTO!
¡ALDO, CÓMO PUEDES PENSAR QUE NOSOTRAS TOMAMOS TU COLLAR, FUE ESTE ERIZO TRAVIESO QUIEN SE LO LLEVÓ A TODA VELOCIDAD. PERO AL FIN LO ATRAPAMOS!
8
LO SIENTO ALDO, TOMA TU COLLAR, PENSÁBAMOS DEVOLVÉRTELO ANTES DE QUE TE DIERAS CUENTA DE SU PÉRDIDA.
BUENO DINA, DE TODOS MODOS, EL COLLAR TE LO IBA A REGALAR A LA SALIDA, ASÍ QUE ES TUYO.
¡Y HASTA AHORA ME LO DICES!
INTELECTUM



LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es el significado de una expresión aseverativa que se caracteriza por tener un solo valor de verdad, es decir, el significado presenta la posibilidad de ser verdadero o falso, pero no los dos a la vez. Se simboliza mediante las letras minúsculas p, q, r, s, etc.

Clases de proposiciones lógicas

Simples	Compuestas
Son aquellas proposiciones que carecen de conjunciones gramaticales (y, o, si... entonces, si y solo si) o del adverbio de negación **no**. Ejemplo: • El número 28 es par. • Luis ingresó a San Marcos.	Son aquellas proposiciones que contienen alguna conjunción gramatical o el adverbio de negación **no**. Ejemplo: • El número 2 es par, pero es un número primo. • Luis ingresó a San Marcos y también a la UNI.

Nota

- A la veracidad o falsedad de una proposición se le denomina valor de verdad.
- A las letras p, q, r, s, t, etc. se les denomina variables proposicionales.

CONECTIVOS LÓGICOS

Llamados también operadores lógicos. Son símbolos que reemplazan a las conjunciones gramaticales y al adverbio de negación **no**.

En lenguaje común	Símbolo	Nombre de la proposición
No es cierto que...	$\sim$	Negación
...y...	$\wedge$	Conjunción
...o...	$\vee$	Disyunción
Si... entonces...	$\Rightarrow$	Condicional
... si y solo sí...	$\Leftrightarrow$	Bicondicional

Recuerda

- Las conjunciones son palabras que enlazan proposiciones, sintangmas o palabras.

Nota

Una tabla de verdad, es un diagrama que permite expresar todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus proposiciones simples.

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

La negación ($\sim$)

Dada una proposición p. Se denomina negación de p a la proposición denotada por $\sim p$, la cual niega a la proposición inicial, convirtiéndola en falsa cuando es verdadera y viceversa.

Ejemplos:

- p: 2 es un número primo. (V)
  $\sim$p: 2 no es un número primo. (F)
- q: un rectángulo tiene tres lados. (F)
  $\sim$q: no es cierto que un rectángulo tiene tres lados. (V)

La disyunción ($\vee$)

Cuando dos proposiciones se enlazan por medio de la palabra **o**, forman una proposición compuesta llamada disyunción y es denotada de la forma: $p \vee q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p \vee q$ es falsa (F) únicamente cuando p y q son ambas falsas, en los demás casos es verdadera.

Observación

La tabla de verdad de la negación es:

p	$\sim$p
V	F
F	V

La conjunción (∧)

Dos proposiciones se pueden enlazar por medio de la palabra **y** para formar una nueva proposición llamada conjunción de ambos. La conjunción de las proposiciones p y q se denota por: p ∧ q.
Su tabla de verdad es:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p ∧ q es verdadera (V) únicamente cuando p y q son ambas verdaderas.

Nota
En un esquema molecular, el conectivo principal es el operador de mayor jerarquía que se encuentra libre de signos de colección.

La condicional (⇒)

Muchas proposiciones, especialmente las matemáticas, son de la forma: **si p entonces q**. Tales proposiciones se denominan condiciones y se les denota por: p ⇒ q.
A la proposición p se le denomina antecedente y a q consecuente.
Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p ⇒ q es falsa (F) únicamente cuando p es verdadera y q es falsa.

Nota
Denominamos matriz principal de una tabla de verdad, a la columna que contiene los valores de verdad correspondiente al conectivo principal.

La bicondicional (⇔)

Relaciona dos proposiciones mediante el conectivo **si y solo si**.
Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

p ⇔ q es verdadera (V) únicamente cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

La disyunción exclusiva (∆)

Relaciona dos proposiciones mediante el conectivo **o ... o ...**
Su tabla de verdad es:

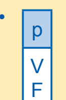
p	q	p ∆ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p ∆ q es verdadera (V) únicamente cuando p y q tienen diferente valor de verdad.

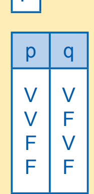
Observación

- Para evaluar una tabla de verdad de 2 variables proposicionales se necesitan 4 valores de verdad; para evaluar una tabla de verdad de 3 variables proposicionales se necesita 8 valores de verdad.
- En general, el número de valores de verdad que se asigna a cada variable, resulta de aplicar la fórmula 2^n, donde n es el número de variables proposicionales que hay en el esquema molecular.

Ejemplos

- 

p
V
F

- 

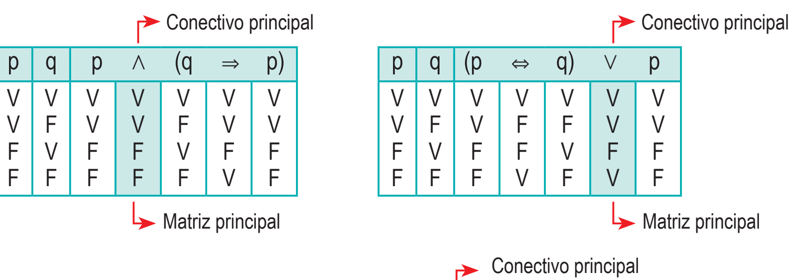
p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

-

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

ESQUEMA MOLECULAR

Un esquema molecular es la combinación de variables proposicionales, conectivos lógicos y signos de agrupación.
Ejemplos:



Conectivo principal: ∧

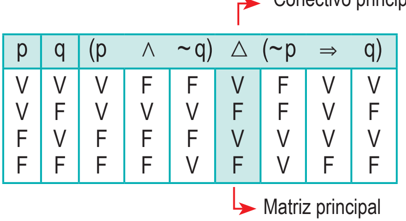
p	q	p	∧	(q	⇒	p)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

Matriz principal

Conectivo principal: ∨

p	q	(p	⇔	q)	∨	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F

Matriz principal



Conectivo principal: ∆

p	q	(p	∧	~q)	∆	(~p	⇒	q)
V	V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	F

Matriz principal

CIRCUITOS LÓGICOS

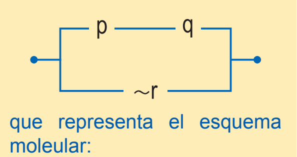
Un circuito conmutador puede estar solamente en dos estados estables: cerrado o abierto, así como una proposición puede ser verdadera o falsa, entonces podemos representar una proposición utilizando un circuito lógico.

Tipos de circuitos lógicos

Circuitos en serie	Circuitos en paralelo
Dos interruptores conectados en serie representan una conjunción. —p — q — <> $p \wedge q$	Dos interruptores conectados en paralelo representan una disyunción. p (arriba), q (abajo) <> $p \vee q$

Observación

Los circuitos lógicos tambien pueden ser mixtos, por ejemplo:



que representa el esquema moleular:

$(p \wedge q) \vee \sim r$

CLASIFICACIÓN DE LOS ESQUEMAS MOLECULARES

a) **Tautológico:** cuando en el operador principal solo hay valores verdaderos.
b) **Contingente o consistente:** cuando en el operador principal se tiene, por lo menos, un valor verdadero y uno falso. También se llama indeterminación.
c) **Contradictorio o inconsistente:** cuando el operador principal solo tiene valores falsos.

La implicación

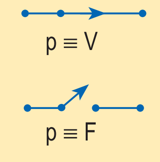
Se llama así a la proposición **condicional** cuando es tautológica, ($p \Rightarrow q \equiv V$).

La equivalencia

Se llama así a la proposición **bicondicional** cuando es tautológica, ($p \Leftrightarrow q \equiv V$).

Atención

Una proposición verdadera se puede representar en un circuito con un interruptor cerrado, y una proposición falsa con un interruptor abierto.



LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Idempotencia $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	2. Conmutativa $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. Asociativa $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	4. Distributiva $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Absorción $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$	6. De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
7. Del complemento $\sim(\sim p) \equiv p$ $p \vee \sim p \equiv V$ $p \wedge \sim p \equiv F$	8. De la identidad $p \vee V \equiv V$ $p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$
9. De la condicional $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	10. De la bicondicional $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Ejemplo:
Halla el equivalente de: $[\sim(\sim p \vee \sim q)] \vee [\sim(\sim q \vee \sim p)]$

Resolución:
Usando la ley de De Morgan: $[\sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q)] \vee [\sim(\sim q) \wedge \sim(\sim p)]$

$(p \wedge q) \vee \underbrace{(q \wedge p)}$

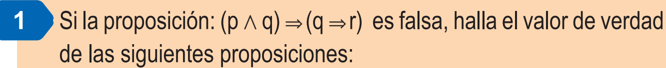
$\underbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge q)}$ (Conmutativa)

$(p \wedge q)$ (Idempotencia)

Nota

Las leyes de la lógica proposicional son aquellas equivalencias lógicas que nos permiten simplificar un problema y expresarlo en forma más sencilla.

Problemas resueltos



1 Si la proposición: $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es falsa, halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$

II. $(p \vee \sim r) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$

III. $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$

Resolución:

De la proposición:

$\underbrace{(p \wedge q)}_{V} \Rightarrow \underbrace{(q \Rightarrow r)}_{F} \equiv F$

$p \wedge q \equiv V$ $\quad$ $q \Rightarrow r \equiv F$

$p \equiv V$ $\quad$ $q \equiv V$

$q \equiv V$ $\quad$ $r \equiv F$

Desarrollamos las proposiciones:

I. $\sim(V \vee F) \Rightarrow (V \vee V)$

$\sim(V) \Rightarrow (V)$

$F \Rightarrow V \equiv V$

II. $(V \vee V) \Rightarrow (V \wedge V)$

$V \Rightarrow V \equiv V$

III. $[(V \wedge F) \vee (V \wedge V)] \Leftrightarrow (V \vee V)$

$(F \vee V) \Leftrightarrow (V \vee V)$

$V \Leftrightarrow V \equiv V$

2 No río a menos que reniegue. No reniego excepto que esté tranquilo. Luego es equivalente a:

I. Ni río ni estoy tranquilo.

II. No estoy tranquilo salvo que reniegue.

III. Río porque estoy tranquilo.

IV. No río salvo que esté tranquilo.

V. Lloro y estoy tranquilo.

Resolución:

p: río

q: reniego

r: esté tranquilo

Formalizamos:

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)$

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$

$\therefore$ $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)$

Que se leerá: no río salvo que esté tranquilo (IV).

3 Se define el operador: (+) por la siguiente tabla:

p	q	p + q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Simplifica: $(p + q) + p$

Resolución:

Hacemos una tabla:

p	q	(p + q)	+	p
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

Por lo tanto: $(p + q) + p \equiv V$

4 Si s es verdadera y la proposición:
$\sim[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge s)] \vee (r \wedge s)$ es falsa, halla los valores de verdad de p, q y r.

Resolución:

$\sim[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge s)] \vee (r \wedge s)$

p → F, q → F, ~q → F, s → V; r → F, s → V

$(F \Rightarrow F) \equiv V$; $(V \wedge V) \equiv V$; $(F \wedge V) \equiv F$

$\sim V \equiv F$ $\quad$ F

F

$\therefore$ $p \equiv F, q \equiv F, r \equiv F$

5 Se definen las proposiciones:

$p \# q \equiv \sim p \wedge q$

$p \,\alpha\, q \equiv p \vee \sim q$

Además, la proposición: $\sim[(q \# p) \Rightarrow (q \,\alpha\, r)]$ es verdadera.

Halla los valores de verdad de p, q y r, respectivamente.

Resolución:

Reemplazando, tenemos:

$\sim[(\sim q \wedge p) \Rightarrow (q \vee \sim r)]$

~q → V (q → F), p → V; q → F, ~r → F (r → V)

$(V \wedge V) \equiv V$; $(F \vee F) \equiv F$

$V \Rightarrow F \equiv F$

$\sim F \equiv V$

$\therefore$ $p \equiv V, q \equiv F, r \equiv V$

6 Se definen:

$p \,\nabla\, q \equiv p \wedge \sim q$

$p \uparrow q \equiv \sim p \vee q$

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim(p \,\nabla\, \sim q)$

II. $p \Rightarrow q \equiv \sim(p \,\nabla\, q) \vee (p \uparrow q)$

III. $\sim p \uparrow q \equiv \sim(\sim p \,\nabla\, q)$

Resolución:

I. $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim(p \nabla \sim q)$
$\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$
$\sim p \vee \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$ (V)

II. $p \Rightarrow q \equiv \sim(p \nabla q) \vee (p \uparrow q)$
$p \Rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee q)$
$p \Rightarrow q \equiv \underbrace{(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)}$
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (V)

III. $\sim p \uparrow q \equiv \sim(\sim p \nabla q)$
$p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
$p \vee q \equiv p \vee q$ (V)

Por lo tanto, todas las proposiciones son correctas.

7 Simplifica la expresión lógica:
$\sim\{\sim[(p \vee q) \wedge r] \vee \sim q\}$

Resolución:

$\sim\{\sim[(p \vee q) \wedge r] \vee \sim q\}$
(De Morgan) $[(p \vee q) \wedge r] \wedge q$
(Distributiva) $[(p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \wedge q$
$[(p \wedge r) \wedge q] \vee [(q \wedge r) \wedge q]$
(Absorción) $[p \wedge (q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \equiv q \wedge r$

8 Se define el operador $\downarrow$ mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Simplifica: $[(p \downarrow q) \downarrow p] \Rightarrow (p \downarrow q)$

Resolución:
Hallamos la resultante del esquema molecular utilizando la tabla de verdad:

p	q	$[(p \downarrow q)$	$\downarrow$	$p]$	$\Rightarrow$	$(p \downarrow q)$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

Luego:

p	$\sim p$
V	F
V	F
F	V
F	V

Entonces:
$\{[(p \downarrow q) \downarrow p] \Rightarrow (p \downarrow q)\} \equiv \sim p$

9 Si # es un conectivo lógico definido mediante:
$p \# q \equiv (p \vee q) \wedge [\sim(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]$

Simplifica la siguiente expresión lógica:
$\{[(p \vee q) \# (p \wedge q)] \# \sim q\} \wedge [q \wedge (p \vee q)]$

Resolución:

$p \# q \equiv (p \vee q) \wedge \underbrace{[\sim(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)]}_{V}$

Entonces:
$p \# q \equiv p \vee q$

Luego:
$\{[(p \vee q) \# (p \wedge q)] \# \sim q\} \wedge [q \wedge (p \vee q)]$
$\{[(p \vee q) \vee (p \wedge q)] \vee \sim q\} \wedge q$
$\{(p \vee q) \vee \sim q\} \wedge q$
$\{p \vee \underbrace{(q \vee \sim q)}_{V}\} \wedge q$
$\{p \vee V\} \wedge q$
$\underbrace{V \wedge q}_{q}$

10 Simplifica la siguiente expresión lógica:
$[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Resolución:

$[(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$
Leyes conmutativa y asociativa:
$[(p \wedge \sim p) \wedge (q \wedge \sim q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Ley del complemento:
$p \wedge \sim p \equiv F$ y $q \wedge \sim q \equiv F$

Entonces:
$[F \wedge F] \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$F \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$\sim p \wedge \sim q$
$\underbrace{\sim(p \vee q)}$
Ley de absorción

TEORÍA DE CONJUNTOS

Nota

- Para representar a los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas A, B, C, ...; y para denotar a sus elementos se usan las letras minúsculas, a menos que dichos elementos sean, a su vez, conjuntos.
- La **notación gráfica** consiste en representar los elementos dentro de una figura cerrada (diagrama de Venn-Euler).
- La **relación de pertenencia** es una relación exclusiva de elemento a conjunto.

NOCIÓN DE CONJUNTO

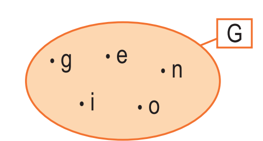
Es una colección o agrupación de objetos bien definidos, llamados elementos, los cuales pueden ser concretos o abstractos.
Ejemplo: las letras de la palabra "genio".

Notación:

G = {g; e; n; i; o}

Nombre del conjunto — Elementos del conjunto G

Gráficamente:



RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si x es un elemento del conjunto A, se dice que "x pertenece al conjunto A" y se denota: $x \in A$

En el caso de no pertenecer x al conjunto A se denota: $x \notin A$

Ejemplo: $B = \{\pi; \sqrt{2}; e; \sqrt{3}\}$

- $\pi \in B$
- $\frac{1}{2} \notin B$
- $\sqrt{2} \in B$
- $\{\pi\} \notin B$

Atención

Veamos la aplicación de cardinal de un conjunto:
Sea el conjunto:
$A = \{\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{5}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \sqrt{7}; U; N; I; 2014\}$
$A = \{\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; U; N; I; 2014\}$
$n(A) = 7$

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión: cuando sus elementos están indicados explícitamente.

Ejemplo: P = {4; 9; 16; 25; 36}

Por comprensión: cuando se indica una propiedad o condición común a todos sus elementos.

Del ejemplo anterior: $P = \{x^2 / x \in \mathbb{Z} \wedge 1 < x < 7\}$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Indica la cantidad de elementos no repetidos de un conjunto.

Notación: n(A); se lee: cardinal del conjunto A.

CUANTIFICADORES

Universal	Existencial
Sea P(x) una función proposicional sobre el conjunto A, el cuantificador $\forall$ indica que todos los valores del conjunto A hacen que la función proposicional P(x) sea verdadera. **La expresión:** Para todo $x \in A$, se verifica P(x). **Se denota:** $\forall x \in A$: P(x) $\forall$ se lee: para todo o cualquier.	Sea P(x) una función proposicional sobre un conjunto A, el cuantificador $\exists$ indica que para algún valor del conjunto A, la función proposicional P(x) es verdadera. **La expresión:** Existe al menos un **x**, tal que se verifica P(x). **Se denota:** $\exists x \in A$/ P(x) $\exists$ se lee: existe al menos.

Recuerda

Una **función proposicional en una variable x** es una oración en la que **x** figura como sujeto u objeto directo, que se convierte en proposición cuando se le asigna un valor específico a **x**.
Notación: P(x)
Ejemplo:
- P(x): x es par.
- P(1) es falso.
- P(2) es verdadero.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión ($\subset$)

Sean A y B dos conjuntos. Se dice que A es un subconjunto de B, si todo elemento de A es también elemento del conjunto B, denotándose: $A \subset B$
Formalmente se expresa así:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

Igualdad (=)

Dos conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$ simultáneamente, es decir:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Conjuntos comparables

Dos conjunto S A y B son comparables cuando solamente uno de ellos está incluido en el otro, es decir, o bien $A \subset B$ o bien $B \subset A$.

Disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen algún elemento en común.

CLASES DE CONJUNTOS

Conjunto finito

Un conjunto es finito, si el proceso de conteo de sus elementos tiene límite.

Ejemplo: $A = \{a; b; \{a; b\}\}$

Conjunto infinito

Un conjunto es infinito, si el proceso de conteo de sus elementos no tiene límite.

Ejemplo: $R = \{x / x$ es un número real$\}$

Conjunto vacío o nulo

Es aquel conjunto que carece de elementos.

Ejemplo: $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge \sqrt[x]{17} \in \mathbb{N}\} = \{\ \} = \varnothing$

Conjunto unitario

Es aquel conjunto que consta de un solo elemento.

Ejemplo: $P = \{x + y / x; y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 0\} = \{0\}$

Conjunto universal

Es el conjunto que contiene a todos los elementos que están siendo considerados en un estudio o contexto particular. Se denota generalmente por U.

Ejemplo: $M = \{2; 6; 10; 12\}$

Podrá ser un conjunto universal para M: $U = \{x / x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x < 13\}$

Conjunto potencia

El conjunto potencia de A es aquel cuyos elementos son todos subconjuntos de A.

Notación: P(A); se lee conjunto potencia de A.

Ejemplo: $A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\} \Rightarrow P(A) = \{\varnothing; \{\sqrt{2}\}; \{\sqrt{3}\}; \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}\}$

Se observa que: $n[P(A)] = 4 = 2^2$

En general, el número de subconjuntos que se pueden formar con los elementos de un conjunto A es:

$$n[P(A)] = 2^{n(A)}$$

Par ordenado

Es un conjunto de dos elementos para los cuales se considera el orden en que están indicados.

Notación: (a; b); se lee par ordenado a; b.

a: 1.ª componente; b: 2.ª componente

Se cumple: $(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Observación: $(a; b) \neq (b; a)$

Ten en cuenta

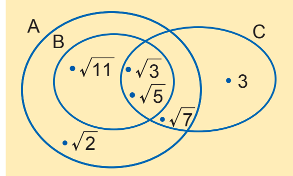
Ejemplo 1:
Sean los conjuntos:

$A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; \sqrt{11}\}$

$B = \{\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{11}\}$

$C = \{\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}; 3\}$

Gráficamente:



• $C \not\subset A$ • $B \subset A$ • $C \not\subset B$

Ejemplo 2:

Dados los conjuntos:

$A = \{\sqrt[x]{x} / x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x < 6\}$

$B = \{1; \sqrt[2]{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{4}; \sqrt[5]{5}\}$

Se observa que: $A \subset B \wedge B \subset A$

$\therefore A = B$

Ejemplo 3:

$\mathbb{Q} = \{x / x$ es un número racional$\}$

$\mathbb{I} = \{x / x$ es un número irracional$\}$

Se observa que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son disjuntos.

Recuerda

El vacío $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto, es decir:

$\forall A: \varnothing \subset A$

• $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ • $\varnothing \neq \{\{\ \}\}$

Por ejemplo:

$P(A) = \{x / x \subset A\}$

De acuerdo con la definición se cumple:

$x \in P(A) \Leftrightarrow x \subset A$

Nota

Para el conjunto $A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$

$\varnothing; \{\sqrt{2}\}; \{\sqrt{3}\}$ son subconjuntos propios.

n.° de subconjuntos propios $= 3 = 2^2 - 1 = 2^{n(A)} - 1$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión (∪)

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B	B A $A \cup B = B$

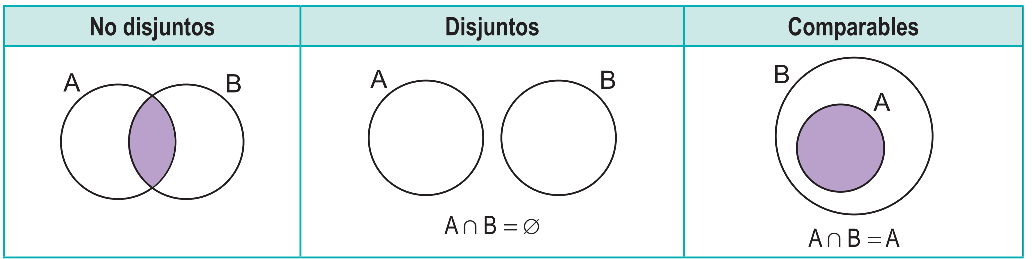
Ejemplo 4
Sean los conjuntos:
$A = \{11; 13; 15; 18\}$
$B = \{10; 11; 12; 13\}$
$A \cup B = \{10; 11; 12; 13; 15; 18\}$

De las figuras: • $n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos • $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

Intersección (∩)

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)



No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A \cap B = \varnothing$	B A $A \cap B = A$

Del ejemplo 4:
$A \cap B = \{11; 13\}$

De las figuras: • $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos • $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

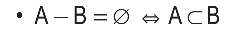
Diferencia (–)

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Representación gráfica (casos posibles)

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A - B = A$	B A $A - B = \varnothing$

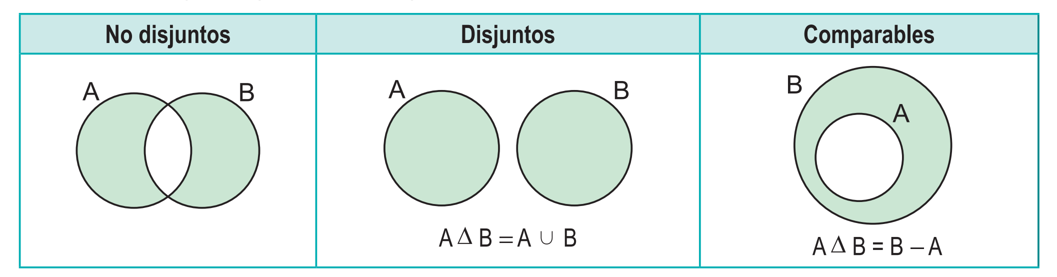
Del ejemplo 4:
$A - B = \{15; 18\}$

De las figuras: • $A - B = A \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos  • $A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$

Diferencia simétrica (Δ)

$$A \,\Delta\, B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

Representación gráfica (casos posibles)

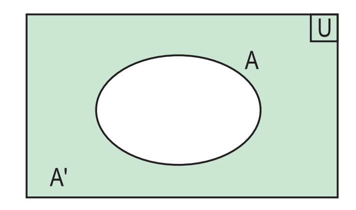


No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A B	A B $A \,\Delta\, B = A \cup B$	B A $A \,\Delta\, B = B - A$

Del ejemplo 4:
$A \,\Delta\, B = \{10; 12; 15; 18\}$

Complemento (A' o A^C)

$$A' = A^c = \{x / x \notin A\}$$



> **Observación**
>
> Notamos que el complemento se considera siempre respecto a un conjunto universal (U).

Producto cartesiano

Sean los conjuntos no vacíos A y B. Se define el producto cartesiano como el conjunto:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo:

- $A = \{2; 4; 6\}$ • $B = \{1; 7\}$ $\therefore$ $A \times B = \{(2; 1); (2; 7); (4; 1); (4; 7); (6; 1); (6; 7)\}$

Diagrama sagital	Diagrama cartesiano
A: • 2, • 4, • 6 → B: • 1, • 7	B: 7, 1; A: 2, 4, 6

Propiedades

- $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
- $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Si: $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$; para todo conjunto C.

Si: $A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

> **Atención**
>
> Propiedades adicionales:
>
> $A - B = A \cap B'$
>
> $A' - B' = B - A$
>
> $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
>
> $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$
>
> $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
>
> $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Idempotencia:	• $A \cup A = A$	• $A \cap A = A$
Conmutativa:	• $A \cup B = B \cup A$	• $A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	• $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	• $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva:	• $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	• $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan:	• $(A \cup B)' = A' \cap B'$	• $(A \cap B)' = A' \cup B'$
Absorción:	• $A \cup (A \cap B) = A$ • $A \cap (A \cup B) = A$	• $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$ • $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
Del complemento:	• $A \cup A' = U$	• $A \cap A' = \varnothing$ • $(A')' = A$
De la unidad:	• $U \cup A = U$ • $U \cap A = A$	• $\varnothing \cup A = A$ • $\varnothing \cap A = \varnothing$

Problemas resueltos

1 Sea el conjunto:
$T = \{\varnothing; a; \{a\}; \{a; \{\varnothing\}\}\}$
Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- $\{\varnothing; a\} \subset T$
- $\{\varnothing\} \in T$
- $\{a; \{a\}\} \in T$
- $\{a\} \in T$
- $\{\varnothing; \{a; \{\varnothing\}\}\} \subset T$
- $\{\{a\}; \{\varnothing\}\} \subset T$

Resolución:
- $\{\varnothing; a\} \subset T$ (verdadero)
  $\varnothing$ y a son elementos del conjunto T, entonces el conjunto conformado por estos dos elementos es un subconjunto de T.
- $\{a\} \in T$ (verdadero)
  $\{a\}$ es un elemento del conjunto T.
- $\{\varnothing\} \in T$ (falso)
- $\{\varnothing\}$ no es un elemento de T ($\varnothing \neq \{\varnothing\}$).
  $\{\varnothing; \{a; \{\varnothing\}\}\} \subset T$ (verdadero)
  $\varnothing$ y $\{a; \{\varnothing\}\}$ son elementos del conjunto T, entonces el conjunto formado por estos dos elementos es un subconjunto de T.
- $\{a; \{a\}\} \in T$ (falso)
  $\{a; \{a\}\}$ no es un elemento de T.
- $\{\{a\}; \{\varnothing\}\} \subset T$ (falso)
  $\{a\}$ es un elemento de T, pero $\{\varnothing\}$ no lo es, entonces
  $\{\{a\}; \{\varnothing\}\} \not\subset T$

2 Sea el conjunto:

$$A = \left\{ \left[\!\left[\frac{4x+3}{5} \right]\!\right] / x \in \mathbb{Z} \ \wedge \ -2 \le x \le 2 \right\}$$

Donde $[\![x]\!]$ es el máximo entero de x, es decir:
$[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \le x < n+1 \,;\, n \in \mathbb{Z}$
Halla la suma de los elementos de A.

Resolución:
Tenemos:
$-2 \le x \le 2$

$-5 \le 4x + 3 \le 11$

$-1 \le \frac{4x+3}{5} \le 2{,}2$

Luego:

$-1 \le \frac{4x+3}{5} < 0 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{4x+3}{5}\right]\!\right] = -1$

$0 \le \frac{4x+3}{5} < 1 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{4x+3}{5}\right]\!\right] = 0$

$1 \le \frac{4x+3}{5} < 2 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{4x+3}{5}\right]\!\right] = 1$

$2 \le \frac{4x+3}{5} \le 2{,}2 \Rightarrow \left[\!\left[\frac{4x+3}{5}\right]\!\right] = 2$

Por lo tanto: $A = \{-1; 0; 1; 2\}$
Nos piden: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$

3 Sean los conjuntos no vacíos M y N. Si la cantidad de subconjuntos de M excede a la cantidad de subconjuntos propios de N en 2p + 1, y la suma entre ellos es 2p + 15. Halla el número de elementos de N.

Resolución:
Por dato:
- $2^{n(M)} - (2^{n(N)} - 1) = 2p + 1$
  $2^{n(M)} - 2^{n(N)} = 2p$ ... (I)
- $2^{n(M)} + (2^{n(N)} - 1) = 2p + 15$
  $2^{n(M)} + 2^{n(N)} = 2p + 16$ ... (II)
- Sumando (I) y (II):
  $2 \,.\, 2^{n(M)} = 4p + 16$
  $2^{n(M)} = 2p + 8$ ... (III)
- De (III) y (II):
  $2p + 8 + 2^{n(N)} = 2p + 16$
  $2^{n(N)} = 8$
  $2^{n(N)} = 2^3$
  $\therefore\ n(N) = 3$

4 Sean los conjuntos:
$A = \{(x+1)^{\sqrt{x+1}}; a; a-3; 19\}$
$B = \{19; a-3\};\ x, a \in \mathbb{Z}^+$
Además: $A \subset B$
Halla: x + a

Resolución:
Observamos que $B \subset A$, además, por dato $A \subset B$, entonces: $A = B$
$A = \{(x+1)^{\sqrt{x+1}}; a\}$
$B = \{19; a-3\}$

Se cumple:
$a = 19 \ \vee \ a = a - 3$
Descartamos que $a = a - 3$; puesto que obtendríamos $0 = -3$ (absurdo), luego: $a = 19$
Entonces :

$(x+1)^{\sqrt{x+1}} = a - 3$
$(x+1)^{\sqrt{x+1}} = 19 - 3$
$(x+1)^{\sqrt{x+1}} = 16$
$\sqrt{(x+1)^{\sqrt{x+1}}} = \sqrt{16}$
$\sqrt{x+1}^{\sqrt{x+1}} = 2^2$
$\Rightarrow \sqrt{x+1} = 2$
$x + 1 = 4$
$x = 3$

Nos piden:
$x + a = 3 + 19 = 22$

5 Luego de combinar m frutas distintas, para preparar un jugo surtido, se obtuvo 247 diferentes jugos. Halla m.

Resolución:

Sea A el conjunto de frutas y n(A) = m. El conjunto potencia P(A) contiene a todos los conjuntos formados con los elementos de A (frutas), incluyendo al vacío.

Como el problema trata de jugos surtidos, no se tomarán en cuenta a los conjuntos unitarios (una fruta) y al conjunto vacío.

Entonces:

$$2^{n(A)} - 1 - m = 247$$

(1: Conjunto vacío ∅; m: n.° conjuntos unitarios)

$$2^{n(A)} - m = 248$$

Como n(A) = m, obtendríamos:

$2^m = 248 + m$

$\Rightarrow 2^8 = 248 + 8$

$\therefore\ m = 8$

6 Sean los conjuntos:

$A \cup B = \{x^4 + 1; y\}$

$A = \{x^4 + 1; y; 1 - 2x^2; 2 - (x + 13)^z\}$

Si $A \cup B$ es unitario y $\{x; y; z\} \subset \mathbb{Z}$, halla: $2y + x + z$

Resolución:

Para cualquier conjunto se cumple:

$$A \subset (A \cup B)$$

En el enunciado observamos:

$$(A \cup B) \subset A$$

Entonces: $A = A \cup B$

Por dato, $A \cup B$ es unitario:

$x^4 + 1 = y = 1 - 2x^2$

$\Rightarrow x^4 + 1 = 1 - 2x^2$

$x^4 + 2x^2 = 0$

$x^2(x^2 + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Luego:

$x^4 + 1 = y \quad \wedge \quad 2 - (x + 13)^z = 1$

$y = 1 \qquad 13^z = 1$

$z = 0$

Nos piden:

$2y + x + z = 2(1) + 0 + 0 = 2$

7 Sea el conjunto: $P = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 4\}$

Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\forall\, x \in P;\ x^2 < 5$

II. $\exists\, x \in P / x - 2 > 1$

III. $\forall\, x \in P, \exists\, y \in P / x + y = 0$

IV. $\exists\, x \in P / x + 1 < 0$

Resolución:

Determinamos el conjunto P por extensión:

$P = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\} = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Luego:

I. Verdadero

Si $x \in P \Rightarrow x^2$: 0; 1; 4 $\Rightarrow x^2 < 5$

II. Falso

$x = -2$: $-2 - 2 > 1$ (F)

$x = -1$: $-1 - 2 > 1$ (F)

$x = 0$: $0 - 2 > 1$ (F)

$x = 1$: $1 - 2 > 1$ (F)

$x = 2$: $2 - 2 > 1$ (F)

III. Verdadero

$x = -2$; $y = 2$: $-2 + 2 = 0$

$x = -1$; $y = 1$: $-1 + 1 = 0$

$x = 0$; $y = 0$: $0 + 0 = 0$

$x = 1$; $y = -1$: $1 - 1 = 0$

$x = 2$; $y = -2$: $2 - 2 = 0$

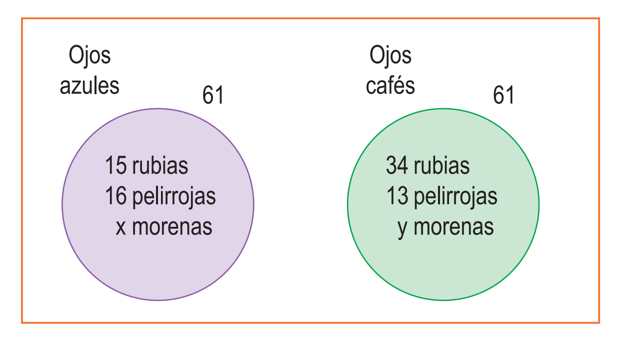
IV. Verdadero

Para $x = -2$: $-2 + 1 < 0$

8 En un grupo de 122 señoritas: 49 son rubias, 44 son morenas y el resto pelirrojas; 61 tienen ojos azules y las otras cafés; 15 rubias tienen ojos azules y 16 pelirrojas tienen ojos azules. ¿Cuántas morenas de ojos cafés hay en el grupo?

Resolución:

Notemos que los conjuntos son disjuntos. Así tenemos:



Del conjunto de ojos azules:

$15 + 16 + x = 61$

$x = 30$

Luego:

Morenas = 44

$x + y = 44$

$30 + y = 44 \Rightarrow y = 14$

Por lo tanto, las morenas de ojos cafés son: 14

NUMERACIÓN

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la formación, lectura y escritura correcta de los números.

CONCEPTOS PREVIOS

- **Número.** Es un ente matemático que indica cantidad y nos permite cuantificar los elementos de la naturaleza.
- **Numeral.** Es la representación simbólica o figurativa de un número.
- **Cifra o dígito.** Son los símbolos que convencionalmente se utilizan en la formación de los numerales.

Nota

- Las cifras que usaremos para la formación de numerales son: 0; 1; 2; 3; ...
- La base de un sistema de numeración no solamente será de una cifra sino, también, de dos, tres o más cifras.
- En un sistema de numeración de base n, la cifra máxima será (n – 1).

SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de principios, reglas y convenios que rigen la formación y representación de números con una cantidad limitada de símbolos (cifras o dígitos).

PRINCIPIOS DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Principio del orden y lugar

Toda cifra que conforma un numeral tiene asociado un orden y un lugar.

- **Orden.** Se cuenta de derecha a izquierda a partir de cero.
- **Lugar.** Se cuenta de izquierda a derecha a partir de uno.

Ejemplo:

Orden ←	5	4	3	2	1	0
	9	2	4	7	3	8
Lugar →	1	2	3	4	5	6

Principio de la base

Todo numeral quedará expresado en una determinada base (mayor que uno), la cual nos indica de cuánto en cuánto agrupamos las unidades de un cierto orden para obtener unidades del orden inmediato superior.

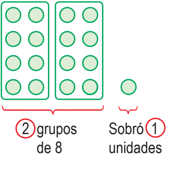
Ejemplo:
Expresa 17 unidades en las bases 3; 8 y 5.

- En base 3:

① conjunto de 3 ② grupos de 3 sobró ② unidades

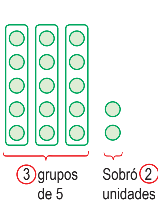
$122_{(3)}$

- En base 8:



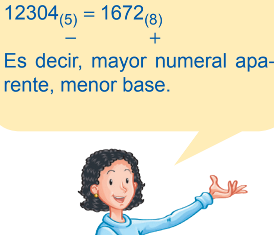
$21_{(8)}$

- En base 5:



$32_{(5)}$

Por lo tanto: $17 = 122_{(3)} = 21_{(8)} = 32_{(5)}$



Atención

En la práctica:

$\overset{+}{1}2304_{(\underset{-}{5})} = \overset{-}{1}672_{(\underset{+}{8})}$

Es decir, mayor numeral aparente, menor base.

Principio de la cifra

Toda cifra que conforma un numeral es menor que la base; además, el número de cifras posibles a utilizar en cierta base es igual a la base.
Hasta aquí podemos concluir:

1. En una igualdad de numerales, a mayor numeral aparente le corresponde menor base, y, análogamente, a menor numeral aparente le corresponde mayor base.
2. Las cifras permitidas en un sistema de numeración de base n son: 1; 2; 3; ...; (n – 1).
3. El número de cifras que se puede utilizar para la formación de numerales en cierta base, es igual a la base.
4. La base es un número entero positivo mayor o igual a 2.

Algunos sistemas de numeración

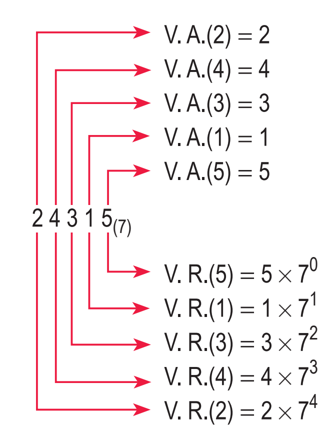
Base	Nombre	Cifras que utiliza
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...; (n − 2); (n − 1)

> **Nota**
> - El sistema de numeración de base n puede utilizar n cifras diferentes.
> - Solo para la última cifra de un numeral, su valor relativo coincidirá con su valor absoluto.

Principio del valor de las cifras

Toda cifra que forma parte de un numeral tiene dos valores:

- **Valor relativo (V. R.).** Es el valor que toma la cifra teniendo en cuenta a la base y su respectivo orden.
- **Valor absoluto (V. A.).** Es el valor que tiene la cifra por su representación.



> **Atención**
> Numeral capicúa
> Es aquel numeral cuyas cifras equidistantes son iguales.

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Cada cifra de un número puede ser representada por una letra del abecedario; todas ellas cubiertas por una barra horizontal, para distinguirlas de las expresiones algebraicas.
Ejemplo:

$\overline{abc}_{(n)}$: representa cualquier número de tres cifras en base n.

Consideraciones

1. Toda expresión que esté entre paréntesis representará una cifra.

   Ejemplos:

   - $\overline{(2a)a}$: 21; 42; 63; 84
   - $\overline{1a(a+7)}$: 107; 118; 129

2. La primera cifra de un numeral debe ser distinta de cero:

   Ejemplo:

   $\overline{x1y}_{(3)}$: $110_{(3)}$; $111_{(3)}$; $112_{(3)}$; $210_{(3)}$; $211_{(3)}$; $212_{(3)}$ (x solo puede ser 1 ó 2)

3. Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, salvo que se indique.

   Ejemplo:

   $\overline{ab}_{(3)}$: $10_{(3)}$; $11_{(3)}$; $12_{(3)}$; $20_{(3)}$; $21_{(3)}$; $22_{(3)}$

Atención

La descomposición polinómica también se puede realizar por bloques.
Ejemplos:
- $112288_{(11)} = 11_{(11)}11^4 + 22_{(11)} \times 11^2 + 88_{(11)}$
- $\overline{abcabc}_{(n)} = \overline{abc}_{(n)} \times n^3 + \overline{abc}_{(n)}$
- $\overline{xyxy}_{(n)} = \overline{xy}_{(n)} \times n^2 + \overline{xy}_{(n)}$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Se define como la suma de los valores relativos de cada una de las cifras del numeral.

Ejemplo:

$23451_{(7)} = \text{V. R. (2)} + \text{V. R. (3)} + \text{V. R. (4)} + \text{V. R. (5)} + \text{V. R. (1)} = 2 \times 7^4 + 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 5 \times 7 + 1 \times 7^0$

En general:

$$\underbrace{\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0}}_{k+1 \text{ cifras}}{}_{(n)} = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

CRITERIO DE PARIDAD DE UN NUMERAL

La paridad de un numeral se analiza mediante la descomposición polinómica, teniendo en cuenta, además que:

- $(\#\ \text{par})^k = \#\ \text{par};\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$
- $(\#\ \text{impar})^k = \#\ \text{impar};\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$
- $(\#\ \text{par}) \times k = \#\ \text{par};\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$

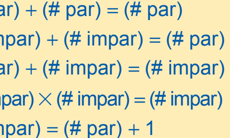
1. Si la base es par, la última cifra del numeral determinará su paridad. Veamos:

$N = \overline{abcd}_{(n)} = an^3 + bn^2 + cn + d$; n: par

$= a \times (\#\ \text{par})^3 + b \times (\#\ \text{par})^2 + c \times (\#\ \text{par}) + d$

$= \underbrace{a \times (\#\ \text{par})^3 + b \times (\#\ \text{par})^2 + c \times (\#\ \text{par})}_{\#\ \text{par}} + \boxed{d}$

Si d es par, entonces N será par.
Si d es impar, entonces N será impar.



Observación

(# par) + (# par) = (# par)
(# impar) + (# impar) = (# par)
(# par) + (# impar) = (# impar)
(# impar) × (# impar) = (# impar)
(# impar) = (# par) + 1

2. Si la base es impar, el resultado de la suma de cifras del numeral determina la paridad. Veamos:

$N = \overline{abcd}_{(n)} = an^3 + bn^2 + cn + d$; n: impar

$= a \times (\#\ \text{impar})^3 + b \times (\#\ \text{impar})^2 + c \times (\#\ \text{impar}) + d$

$= a \times (\#\ \text{impar}) + b \times (\#\ \text{impar}) + c \times (\#\ \text{impar}) + d$

$= a \times (\#\ \text{par} + 1) + b \times (\#\ \text{par} + 1) + c \times (\#\ \text{par} + 1) + d$

$= \underbrace{a \times (\#\ \text{par}) + b \times (\#\ \text{par}) + c \times (\#\ \text{par})}_{\#\ \text{par}} + \boxed{a + b + c + d}$

Si esta suma es par, entonces N será par y si esta suma es impar, entonces N será impar.

CAMBIOS DE BASE

De base n a base 10 (n ≠ 10)

Para convertir un número de cualquier sistema de numeración al sistema decimal, emplearemos dos métodos:
- Descomposición polinómica.
- Ruffini.

Ejemplo: convierte $6235_{(7)}$ a base 10.
Resolución:

Por descomposición polinómica	Por Ruffini
$6235_{(7)} = 6 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 5$ $6235_{(7)} = 6 \times 343 + 2 \times 49 + 3 \times 7 + 5$ $6235_{(7)} = 2058 + 98 + 21 + 5$ $6235_{(7)} = 2182$	6 2 3 5 7 ↓ 42 308 2177 × 6 44 311 2182 $6235_{(7)} = 2182$

Recuerda

Los criterios de paridad se cumplen para todo numeral de cualquier cantidad de cifras.

De base 10 a base n (n ≠ 10)

Para convertir un número del sistema decimal a cualquier otro sistema de numeración se utiliza el método de divisiones sucesivas.

Ejemplo: convierte 423 a base 8.
Resolución:

```
423 |_8
416   52 |_8
 (7)  48  (6)
      (4)
```

Luego: $423 = 647_{(8)}$

De base n a base m ($n \neq m$, ambos diferentes de 10)

Se convierte el número dado, de base n al sistema decimal, para luego llevarlo a base m.

Ejemplo: convierte $351_{(6)}$ a base 8.

Resolución:

1.° $351_{(6)} = 3 \times 6^2 + 5 \times 6 + 1 = 108 + 30 + 1 = 139$

2.°
```
139 |_8
136   17 |_8
 (3)  16  (2)
      (1)
```

Luego: $351_{(6)} = 213_{(8)}$

PROPIEDADES

Numeral con cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{k\ \text{cifras}} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1z}_{(n)}}}}} = a + b + c + \ldots + z + n$$

Intervalo para un numeral $N_{(n)}$ con cierta cantidad de cifras

$n^{k-1} \leq N_{(n)}\ 1\ n^k$ Donde k es el número de cifras de $N_{(n)}$.

CASOS ESPECIALES DE CAMBIOS DE BASE

1. De base n a base n^k, $k \in \mathbb{Z}^+$

Dado un número en base n, se forman grupos de k cifras (de derecha a izquierda) y por cada grupo que se forma se encontrará una cifra en base n. Las cifras se obtienen convirtiendo cada grupo a base decimal.

Ejemplo:
Convierte $101011110_{(2)}$ a base 8.

Resolución:
Observamos que $8 = 2^3$; entonces se formarán grupos de 3 cifras de derecha a izquierda.

101	011	$110_{(2)}$
$1 \times 2^2 + 1$	$1 \times 2 + 1$	$1 \times 2^2 + 1 \times 2$
5	3	$6_{(8)}$

$\therefore\ 101011110_{(2)} = 536_{(8)}$

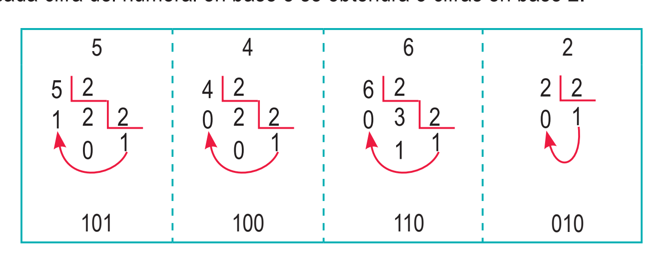
2. De base n^k a base n, $k \in \mathbb{Z}^+$

Dado un número en base n^k, por cada una de sus cifras se obtendrá k cifras en base n y de ser necesario se completará con ceros.

Ejemplo:

Convierte $5462_{(8)}$ a base 2.

Resolución:
Como 8 = 2^3, por cada cifra del numeral en base 8 se obtendrá 3 cifras en base 2.



5	4	6	2
5 ÷ 2 = 2, resto 1; 2 ÷ 2 = 1, resto 0	4 ÷ 2 = 2, resto 0; 2 ÷ 2 = 1, resto 0	6 ÷ 2 = 3, resto 0; 3 ÷ 2 = 1, resto 1	2 ÷ 2 = 1, resto 0
101	100	110	010

$\therefore\ 5462_{(8)} = 101100110010_{(2)}$

Atención

Casos particulares

$$\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\ddots_{\overline{1a}_{(n)}}}}}\ (m\ \text{veces}) = n + ma$$

$$\overline{a1}_{\overline{a1}_{\overline{a1}_{\ddots_{\overline{a1}_{(n)}}}}}\ (m\ \text{veces}) = na^m + a^{m-1} + \ldots + a^2 + a + 1$$

Observación

Si las divisiones no generan k cifras, se completará con ceros a la izquierda.

Problemas resueltos

1 Si el numeral $\overline{(a-2)(a+5)(a+9)}$ está expresado en base 13 y el numeral $\overline{b(b+1)(b+5)(b-5)}$ en base 11.
Halla x + y, si $\overline{ab}_{(7)} + \overline{ba}_{(9)} = \overline{xy}$.

Resolución:
Observamos en los numerales:

- $\overline{(a-2)(a+5)(a+9)}_{(13)}$
  $a-2>0 \wedge a+9<13$
  $a<2 \wedge a<4$
  $\Rightarrow 2<a<4$
  $\downarrow$
  3

- $\overline{b(b+1)(b+5)(b-5)}_{(11)}$
  $0 \leq b-5 \wedge b+5<11$
  $5 \leq b \wedge b<6$
  $\Rightarrow 5 \leq b < 6$
  $\downarrow$
  5

Luego:

$$\overline{ab}_{(7)} + \overline{ba}_{(9)} = \overline{xy}$$
$$35_{(7)} + 53_{(9)} = \overline{xy}$$
$$3 \times 7 + 5 + 5 \times 9 + 3 = \overline{xy}$$
$$26 + 48 = \overline{xy}$$
$$74 = \overline{xy} \Rightarrow x + y = 7 + 4 = 11$$

2 ¿En cuántos sistemas de numeración de base par el número 245 se escribe con 3 cifras?

Resolución:
Nos piden los sistemas de numeración de base par en el que 245 se escribe con 3 cifras, es decir:

$$245 = \overline{abc}_{(n)}$$

Sabemos que:

$$n^2 \leq \overline{abc}_{(n)} < n^3$$
$$n^2 \leq 245 < n^3$$
$$\Rightarrow \quad n^2 \leq 245 \wedge 245 < n^3$$
$$n \leq 15{,}65 \quad 6{,}25 < n$$

Luego: $6{,}25 < n \leq 15{,}65$
De donde: n: 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15
Piden los sistemas de numeración de base par, los cuales son:

$$\underbrace{8;\ 10;\ 12;\ 14}_{\text{4 sistemas de numeración}}$$

3 ¿Cuántos números de 3 cifras y menores que 250 se escriben con 3 cifras iguales en el sistema heptanario?

Resolución:
Nos piden la cantidad de numerales que tengan la siguiente forma:

$$\overline{abc} = \overline{xxx}_{(7)} < 250$$

Luego: $100 \leq \overline{xxx}_{(7)} < 250$

$$100 \leq 49x + 7x + x < 250$$
$$100 \leq 57x < 250$$
$$1{,}75 \leq x < 4{,}38$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{2;\ 3;\ 4}_{\text{3 valores}}$$

4 Halla el valor de a si: $\overline{3a7} = 507_{(n)}$

Resolución:
Del enunciado:

$$\overline{3a7} = 507_{(n)}$$
$$\overline{3a0} + 7 = 500_{(n)} + 7$$
$$\overline{3a0} = 500_{(n)}$$
$$\overline{3a0} = 5n^2$$
$$\overline{3a} \times 10 = 5n^2$$
$$2 \times \overline{3a} = n^2$$
$$2 \times (30 + a) = n^2$$
$$60 + 2a = n^2$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$2 \qquad 8^2$$

Luego: a = 2

5 Si se cumple que: $\overline{abb}_{(7)} = \overline{1aa}$
Halla: a + b

Resolución:
Descomponemos polinómicamente ambos términos:

$$\overline{abb}_{(7)} = \overline{1aa}$$
$$49a + 7b + b = 100 + 10a + a$$
$$49a + 8b = 100 + 11a$$
$$38a + 8b = 100$$
$$19a + 4b = 50;\ a < 7;\ b < 7$$

Si a = 1: $19 + 4b = 50 \Rightarrow b = \frac{31}{4}$ (lo descartamos ya que una cifra no puede ser fracción)

Si a = 2: $38 + 4b = 50 \Rightarrow b = 3$ (posible valor)

Si a = 3: $57 + 4b = 50 \Rightarrow b = -\frac{7}{4}$ (lo descartamos también)

Si **a** toma los valores 4; 5 y 6; **b** tomará valores negativos.
Por lo tanto: a = 2, b = 3
Nos piden: a + b = 2 + 3 = 5

6 Halla el menor valor posible de m + n, si se cumple:
$1331_{(m)} = 8000_{(n)}$

Resolución:
Descomponemos polinómicamente ambos términos:

$$1331_{(m)} = 8000_{(n)}$$
$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 8n^3$$
$$(m+1)^3 = (2n)^3$$
$$m + 1 = 2n$$

Donde: 3 < m; 8 < n; n < m
Luego: m + 1 = 2n
$\downarrow$
9 (mínimo)
$\Rightarrow m = 17$
Por lo tanto:
$(m+n)_{\text{mín.}} = 17 + 9 = 26$

7 ¿En qué sistema de numeración, el mayor número de tres cifras diferentes es igual a $\overline{5ab}$?

Resolución:
El mayor numeral de tres cifras diferente en base n es:
$\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_{(n)}$

Por dato: $\overline{(n-1)(n-2)(n-3)}_{(n)} = \overline{5ab}$

Descomponemos polinómicamente:

$$(n-1)\times n^2 + (n-2)\times n + n - 3 = \overline{5ab}$$
$$n^3 - n^2 + n^2 - 2n + n - 3 = \overline{5ab}$$
$$n^3 - n - 3 = \overline{5ab}$$
$$n^3 - n = \overline{5ab} + 3$$
$$(n-1)n(n+1) = \overline{5ab} + 3$$

Si $n = 5$: $4\times 5\times 6 = 120$ ✗
Si $n = 6$; $5\times 6\times 7 = 210$ ✗
Si $n = 7$: $6\times 7\times 8 = 336$ ✗
Si $n = 8$: $7\times 8\times 9 = 504 = \overline{5ab} + 3$ ✓ $(a = 0;\ b = 1)$
Si $n = 9$: $8\times 9\times 10 = 720$ ✗

En el sistema octanario, el mayor número de tres cifras diferentes es igual a $\overline{5ab} = 501$

8 Calcula el valor de n si m es máximo.

$$\left.{19_{19_{19_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{19_{(n)}}}}}}}}\right\}\text{m veces} = 2(16)_{(10^2)}$$

Resolución:
Por propiedad:

$$\left.{19_{19_{19_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{19_{(n)}}}}}}}}\right\}\text{m veces} = 2(16)_{(10^2)}\ ;\ n > 9$$

$n + 9m = 2\times 10^2 + 16$
$n + 9m = 216$
$n = 9(24 - m)$ ... (I)

Del enunciado, m es máximo, entonces en (I):
Si $m = 24$: $n = 0$ ✗
Si $m = 23$: $n = 9$ ✗
Si $m = 22$: $n = 18$ ✓
Por lo tanto: $n = 18$

9 Si $\overline{(a+4)(a+4)9}_{(\overline{ab})} = \overline{3(22)(2-a)}_{(\overline{a7})}$; calcula: $\overline{ab}_{\overline{ba}_{(5)}}$ en el sistema decimal.

Resolución:
Al observar el numeral $\overline{3(22)(2-a)}_{\overline{a7}}$ tenemos:

$a \le 2$; $\overline{a7}\ 2\ 22$
$a \ge 2$
Entonces: $a = 2$

Reemplazamos en la igualdad:
$669_{(\overline{2b})} = 3(22)0_{(27)}$

Descomponemos polinómicamente:

$$6\times(\overline{2b})^2 + 6\times(\overline{2b}) + 9 = 3\times 27^2 + 22\times 27$$
$$6\times \overline{2b}(\overline{2b}+1) = 2772$$
$$\overline{2b}(\overline{2b}+1) = 462$$
$$\overline{2b}(\overline{2b}+1) = 21\times 22$$
$$\Rightarrow\ b = 1$$

Nos piden:

$$\overline{ab}_{\overline{ba}_{(5)}} = 21_{12_{(5)}} = 21_{(7)} = 15$$

10 Si: $\overline{abc}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} = \overline{15c}_{(13)}$, halla: $a + b + c$

Resolución:
Del enunciado:

$$\overline{abc}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} = \overline{15c}_{(13)}$$

$$\overline{ab0}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} + c = 150_{(13)} + c$$

$$\overline{ab0}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} = 150_{(13)}$$

$$\overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}} \times \overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}} = 15_{(13)}\times 13$$

Entonces:

$$\overline{ab}_{\underbrace{\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}}}_{=13}} = 15$$
$$\overline{ab}_{(13)} = 15_{(13)}$$
$$\overline{ab} = 15$$

$\Rightarrow\ a = 1;\ b = 5$

Luego: $\overline{ab}_{\overline{ab}_{(c)}} = 13$

$$15_{15_{(c)}} = 13$$
$$c + 10 = 13$$
$$c = 3$$

Nos piden:
$a + b + c = 1 + 5 + 3 = 9$

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

Observación

Ten en cuenta las propiedades de la adición en $\mathbb{Z}$:

- Clausura
  $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a + b \in \mathbb{Z}$
- Conmutativa
  $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a + b = b + a$
- Asociativa
  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:
  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Del elemento neutro aditivo
  $\forall a \in \mathbb{Z}: a + 0 = a$
- Del inverso aditivo
  $\forall a \in \mathbb{Z}: a + (-a) = 0$

ADICIÓN

Es una operación directa que consiste en reunir dos o más cantidades homogéneas, llamadas sumandos, en una sola llamada suma.

$$S_1 + S_2 + ... + S_n = S$$

Sumandos   Suma

Ejemplo:

Si $a + b + c + d + e = \overline{2(e + 4)}$, calcula: $\overline{ab41} + \overline{cd51} + \overline{ba41} + \overline{dc51}$

Resolución:

Del enunciado: $a + b + c + d + e = 24 + e$

$a + b + c + d = 24$

Entonces:

$$\begin{array}{r} \overline{ab41} \; + \\ \overline{cd51} \\ \overline{ba41} \\ \overline{dc51} \\ \hline 26584 \end{array}$$

- En el orden 0: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$
- En el orden 1: $4 + 5 + 4 + 5 = 18$
  Escribimos el 8 y llevamos 1 al siguiente orden (orden 2).
- En el orden 2: $b + d + a + c + 1 = 24 + 1 = 25$
  Escribimos el 5 y llevamos 2 al siguiente orden (orden 3).
- En el orden 3: $a + c + b + d + 2 = 24 + 2 = 26$
  Escribimos el 6 y a su izquierda el 2.

Adición en otros sistemas de numeración

Veamos el siguiente ejemplo:

Efectúa: $674_{(9)} + 534_{(9)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 674_{(9)} \; + \\ 534_{(9)} \\ \hline 1318_{(9)} \end{array}$$

Orden → 3210

- En el orden 0: $4 + 4 = 8$
  Como no excede a la base, escribimos directamente esta cifra en el orden 0 de la suma.
- En el orden 1: $7 + 3 = 10$
  Excede a la base. Observamos que hay una vez la base y sobra 1; es decir: $10 = 1 \times 9 + 1$
  Entonces escribimos 1 en el orden 1 de la suma y llevamos 1 al siguiente orden.
- En el orden 2: $6 + 5 + 1 = 12$
  Excede a la base. Observamos que hay una vez la base y sobra 3; es decir: $12 = 1 \times 9 + 3$
  Entonces escribimos la cifra 3 en el orden 2 y la cifra 1 en el orden 3 de la suma.

Nota

Sumas notables:

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

SUSTRACCIÓN

Es la operación inversa a la adición, la cual consiste en que dadas dos cantidades llamadas minuendo y sustraendo, se debe determinar una tercera cantidad llamada diferencia.

$M - S = D$ Donde M es el minuendo, S el sustraendo y D la diferencia.

Sustracción en otros sistemas de numeración

Veamos el siguiente ejemplo:

Efectúa: $715_{(8)} - 362_{(8)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 715_{(8)} \; - \\ 362_{(8)} \\ \hline 333_{(8)} \end{array}$$

Orden → 210

- En el orden 0: $5 - 2 = 3$
  Escribimos esta cifra en el orden cero de la diferencia.
- En el orden 1: $1 - 6$
  Como esta operación no se puede efectuar en el conjunto $\mathbb{Z}^+$, entonces el orden 2 le prestará 8 unidades al orden 1, es decir: $8 + 1 - 6 = 3$
  Escribimos esta cifra en el orden 1 de la diferencia.
- En el orden 2: $(7 - 1) - 3 = 3$; ya que le prestó una base al orden 1.

Propiedades de la sustracción

1. El minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia.

$$M = S + D$$

2. La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$M + S + D = 2M$$

3. Si $\overline{ab}_{(n)} - \overline{ba}_{(n)} = \overline{pq}_{(n)}$, donde $a < b$ y $n \geq 3$, entonces:

$$p + q = n - 1$$

4. Si $\overline{abc}_{(n)} - \overline{cba}_{(n)} = \overline{pqr}_{(n)}$, donde $a < c$ y $n \geq 3$, entonces:

$$p + r = q = n - 1$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO (C. A.)

El complemento aritmético de un número entero positivo es lo que le falta a dicho número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior **al mayor orden del número.** El C. A. de un número N de k cifras y de base n, lo podemos calcular así:

$$C.\,A.\,(N) = 10^k_{(n)} - N$$

Ejemplos:

- $C.\,A.\,(746) = 10^3 - 746 = 254$
- $C.\,A.\,(4325_{(7)}) = 10^4_{(7)} - 4325_{(7)} = 2342_{(7)}$

Nota

Forma práctica para hallar el C. A. de un número

A partir del menor orden, se observa la primera cifra significativa, la cual se le va a restar a n y las demás cifras a (n – 1).

Ejemplos:

- $N = \overbrace{14}^{9}\overbrace{60}^{10}$

  C. A.(N) = 8540
- $N = \overbrace{432}^{6}\overbrace{5}^{7}{}_{(7)}$

  C. A.(N) = $2342_{(7)}$

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación es una operación directa, que consiste en repetir como sumando un número llamado multiplicando, tantas veces como lo indica otro número llamado multiplicador y así conseguir un resultado llamado producto.

$$\underbrace{A + A + \ldots + A + A}_{B\ \text{veces}} = A \times B = P$$

Donde: A es el multiplicando, B el multiplicador y P el producto.

Algoritmo de la multiplicación

$$\begin{array}{lrl} \text{Multiplicando} \longrightarrow & 376\ \times & \\ \text{Multiplicador} \longrightarrow & \underline{48} & \\ & 3008 & \left.\right\} \text{Productos} \Rightarrow 8 \times 376 = 3008 \\ & \underline{1504\ } & \left.\right\} \text{parciales} \quad\ \ 4 \times 376 = 1504 \\ \text{Producto} \longrightarrow & 18048 & \end{array}$$

Multiplicación en otros sistemas de numeración

Observa con atención el siguiente ejemplo:

Efectúa: $56_{(7)} \times 32_{(7)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 56_{(7)}\ \times \\ \underline{32_{(7)}} \\ 145_{(7)} \\ \underline{234_{(7)}\ \ } \\ 2515_{(7)} \end{array}$$

- Se multiplica $2 \times 6 = 12$. Este resultado se expresa en base 7, siendo $12 = 15_{(7)}$; luego se escribe 5 y se lleva 1.
- Se multiplica $2 \times 5 = 10$. A este resultado se le suma 1, resultando 11; lo expresamos en base 7, siendo $11 = 14_{(7)}$; luego se escribe 4 y a su izquierda 1.
- Se multiplica $3 \times 6 = 18$. Este resultado se expresa en base 7, siendo $18 = 24_{(7)}$, luego se escribe 4 y se lleva 2.
- Se multiplica $3 \times 5 = 15$. A este resultado se le suma 2, resultando 17; expresamos esta cantidad en base 7, siendo $17 = 23_{(7)}$, luego se escribe 3 y a su izquierda 2.
- Finalmente, se efectúa la suma de los productos parciales en base 7.

Observación

Ten en cuenta las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$:

- Clausura
  $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \times b \in \mathbb{Z}$
- Conmutativa
  $\forall a, b \in \mathbb{Z}: a \times b = b \times a$
- Asociativa:
  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}:$
  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Del elemento neutro multiplicativo
  $\forall a \in \mathbb{Z}: a \times 1 = a$
- Distributiva
  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}:$
  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

DIVISIÓN

Es una operación inversa a la multiplicación, la cual consiste en que dadas dos cantidades llamadas dividendo y divisor (este último diferente de cero), se debe determinar una tercera cantidad denominada cociente, tal que multiplicada por el divisor, nos dé el dividendo.

CLASES DE DIVISIÓN

División exacta

Es aquella división en la que el dividendo es exactamente igual que el producto del divisor por el cociente.

$$D \,\underline{|\, d} \;\Rightarrow\; D = d \times q \qquad \text{(cociente } q\text{)}$$

Ejemplo:

$$63 \,\underline{|\, 9} \;\Rightarrow\; 63 = 9 \times 7$$

63 7

–

División inexacta

Es aquella división en la cual se va a obtener un nuevo término llamado residuo. Se subclasifica en:

División inexacta por defecto

Cuando el cociente multiplicado por el divisor es menor que el dividendo.

$$D \,\underline{|\, d} \;\Rightarrow\; D = d \times q + r \qquad (r \text{ residuo},\ q \text{ cociente}),\quad r \neq 0$$

Ejemplo:

68 | 9 ⇒ $68 = 9 \times 7 + 5$

63 7

5

División inexacta por exceso

Cuando el cociente multiplicado por el divisor es mayor que el dividendo, considerando a dicho cociente como el mínimo posible, siendo este $q + 1$.

$$D \,\underline{|\, d} \;\Rightarrow\; D = d \times (q_e) - r_e \qquad (r_e \text{ residuo},\ q_e \text{ cociente})$$

Donde:

$q_e = q + 1$

$r_e \neq 0$

Ejemplo:

68 | 9 ⇒ $68 = 9 \times 8 - 4$

72 8

4

Propiedades de la división inexacta

1. $0 < r < d$
   Donde r es el residuo por defecto y d el divisor.
2. $r < \frac{D}{2}$
   Donde r es el residuo por defecto y D es el dividendo.
3. $r + r_e = d$
   Donde r es el residuo por defecto y r_e el residuo por exceso.
4. $r_{máximo} = d - 1$; donde d es el divisor.
   $r_{mínimo} = 1$

Alteraciones de la división inexacta

1. Si en una división inexacta se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el residuo queda multiplicado por dicho número.

$$D \,\underline{|\, d} \text{ (residuo } r\text{, cociente } q) \;\Rightarrow\; D \times n \,\underline{|\, d \times n} \text{ (residuo } r \times n\text{, cociente } q) \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$

2. Si en una división inexacta al dividendo se le agrega el divisor, el cociente aumenta en una unidad y el residuo no varía.

$$D \,\underline{|\, d} \text{ (residuo } r\text{, cociente } q) \;\Rightarrow\; D + d \,\underline{|\, d} \text{ (residuo } r\text{, cociente } q+1)$$

Nota

Determinación de la cantidad de cifras de un producto y un cociente

Si A tiene n cifras y B tiene m cifras (n > m), entonces:

$10^{n-1} \leq A < 10^n$

$10^{m-1} \leq B < 10^m$

1. $10^{n+m-2} \leq A \times B < 10^{n+m}$
   ⇒ A × B tendrá (n + m – 2+1) cifras o (n + m) cifras.
2. $\frac{1}{10^m} < \frac{1}{B} \leq \frac{1}{10^{m-1}}$
   $\frac{10^{n-1}}{10^m} < \frac{A}{B} < \frac{10^n}{10^{m-1}}$
   $10^{n-m-1} < \frac{A}{B} < 10^{n-m+1}$
   ⇒ A ÷ B tendrá (n – m) cifras o (n – m + 1) cifras.

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Es un conjunto de números ordenados de tal manera que la diferencia entre dos términos consecutivos es una cantidad constante llamada razón aritmética.

Ejemplos:

- 69; 80; 91; 102; ...
  (razones: 11, 11, 11)

En general:

$t_1; t_2; t_3; t_4; ...; t_n$
(razones: r, r, r)

Donde:
t_1 es el primer término, t_n el término enésimo, r la razón y n el número de términos.

Fórmulas:

1. Término general:

$$t_n = t_1 + r(n-1)$$

2. Razón:

$$r = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = ...$$

3. Número de términos:

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

4. Suma de términos:

$$S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)n$$

Nota

Si el número de términos de una progresión aritmética es impar, existirá un único término central el cual se calcula así:

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

Conteo de cifras usadas en una progresión aritmética

Sea N un entero positivo de k cifras. La cantidad de cifras que se utiliza al escribir todos los números enteros desde 1 hasta N, está dado por:

$$\text{Cantidad de cifras usadas} = (N+1)k - \underbrace{111\,...\,11}_{k \text{ cifras}}$$

MÉTODO COMBINATORIO

La cantidad total de números que se pueden formar con varios ordenamientos independientes, es igual al producto de las cantidades de los valores que puedan adoptar dichos ordenamientos respecto al valor que toma su cifra correspondiente. Para esto, se debe seguir el siguiente procedimiento:

1.° Escribiremos la forma literal del número.
2.° Se coloca debajo de cada letra los posibles valores que toman, estos dependiendo de la base.
3.° Finalmente, se multiplican las cantidades de valores obtenidos en cada letra.

Ejemplo:
¿Cuántos números de 4 cifras existen en el sistema de numeración de base 5?

Resolución:
Las cifras usadas en el sistema de numeración de base 5 son: 0; 1; 2; 3; 4. Representamos literalmente el número: $\overline{abcd}$

Luego:

a	b	c	d
↓	↓	↓	↓
1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
4	3	3	3
	4	4	4

$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

Por lo tanto, en el sistema de numeración de base 5 existen 500 números de 4 cifras.

Atención

Cuando aparezcan variables repetidas o dependientes, solo se analizará una de ellas.

Ejemplo:
Calcula cuantos números hay con la forma:

$N = \overline{a\left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{b}{2}\right)}$

$\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ son variables dependientes, no las tomaremos en cuenta en el análisis.

a y b deben ser pares:
a puede ser : $\underbrace{2; 4; 6; 8}_{4 \text{ valores}}$

b puede ser: $\underbrace{0; 2; 4; 6; 8}_{5 \text{ valores}}$

∴ Hay $4 \times 5 = 20$ números con esa forma.

Problemas resueltos

1 Si $a + b + c + d = 13$, calcula:

$M = \overline{bdca}_{(5)} + \overline{abdc}_{(5)} + \overline{cabd}_{(5)} + \overline{dcab}_{(5)}$

Resolución:

Colocando los sumandos en forma vertical:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3\,3\,2 \\ \overline{b\,d\,c\,a}_{(5)} + \\ \overline{a\,b\,d\,c}_{(5)} \\ \overline{c\,a\,b\,d}_{(5)} \\ \overline{d\,c\,a\,b}_{(5)} \\ \hline 3\,1\,1\,0\,3_{(5)} \end{array}$$

Veamos:

En el orden 0: $a + c + d + b = 13 = 2 \times 5 + 3$

En el orden 1: $c + d + b + a + 2 = 15 = 3 \times 5 + 0$

En el orden 2: $d + b + a + c + 3 = 16 = 3 \times 5 + 1$

En el orden 3: $b + a + c + d + 3 = 16 = 3 \times 5 + 1$

$\therefore M = 31103_{(5)}$

2 Sabiendo que: $\overline{ABC}_{(9)} + \overline{AB}_{(9)} + \overline{BA}_{(9)} = \overline{BAB}_{(9)}$

Halla: $A + B + C$

Resolución:

$(81A + 9B + C) + (9A + B) + (9B + A) = 81B + 9A + B$

$91A + 19B + C = 82B + 9A$

$82A = 63B - C$

$\quad\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad 3 \quad 4 \quad 6$

$\therefore A + B + C = 13$

3 De la siguiente operación:

$\overline{19ab} + \overline{18ab} + \overline{17ab} + ... + \overline{1ab} = \overline{xyz77}$

Determina el valor de $a + b + x + y + z$.

Resolución:

Se observa que la cantidad de sumandos es 19.

Vemos que $\overline{ab}$ se sumará 19 veces y termina en 77.

Luego: $\overline{ab} \times 19 = ...77 \Rightarrow b = 3$

Tenemos:

$$\begin{array}{r} 1\,9\times \\ a\,3 \\ \hline 5\,7 \\ ...(9a) \\ \hline ...7\,7 \end{array}$$

$\Rightarrow 9a + 5 = ...7$

$9a = ...2 \Rightarrow a = 8$

Reemplazando, la suma será:

$1983 + 1883 + 1783 + ... + 183 = \overline{xyz77}$

$\left(\dfrac{1983 + 183}{2}\right)19 = \overline{xyz77}$

$20\,577 = \overline{xyz77}$

$\Rightarrow x = 2, y = 0, z = 5$

$\therefore a + b + x + y + z = 18$

4 Si: $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn(m+1)}$

Calcula: $2m + 3n$

Resolución:

$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{mn(m+1)}$

Por propiedad:

$m + (m + 1) = 9 \quad \wedge \quad n = 9$

$2m = 8$

$m = 4$

Piden: $2m + 3n = 2(4) + 3(9) = 35$

5 Si: $\overline{1ab} \times \text{C. A.}(\overline{ab}) = 9271$

Calcula: $a \times b$

Resolución:

De: $\overline{1ab} \times \text{C. A.}(\overline{ab}) = 9271$

Se tiene:

$(100 + \overline{ab})(100 - \overline{ab}) = 9271$

$100^2 - (\overline{ab})^2 = 9271$

$10\,000 - (\overline{ab})^2 = 9271$

$(\overline{ab})^2 = 729$

$\Rightarrow \overline{ab} = 27$

$\therefore \quad a \times b = 14$

6 En una sustracción la suma de los tres términos es 306. Si el sustraendo es a la diferencia como 5 es a 4, calcula el sustraendo.

Resolución:

Del dato: $\dfrac{S}{D} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow S = 5k \wedge D = 4k$

Además, sabemos: $M = S + D = 9k$

Luego, del dato: $M + S + D = 306$

Reemplazando:

$9k + 5k + 4k = 306 \Rightarrow 18k = 306$

$k = 17$

$\therefore S = 5k = 85$

7 Halla un número de cuatro cifras que al multiplicarlo por 3, el producto termine en 3071.

Resolución:

Sea el número, de cuatro cifras: $\overline{abcd}$

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1\,2 \\ a\,b\,c\,d\times \\ 3 \\ \hline ...\,3\,0\,7\,1 \end{array}$$

$3.d = ...1 \Rightarrow d = 7$

$3.c + 2 = ...7 \Rightarrow c = 5$

$3.b + 1 = ...0 \Rightarrow b = 3$

$3.a + 1 = ...3 \Rightarrow a = 4$

$\therefore N = 4357$

8 Si: $\overline{abcd}$. n = 4712
$\overline{abcd}$. m = 7068
Halla la suma de cifras del producto de $\overline{abcd}$ por el mayor número capicúa de 3 cifras que se pueda formar con m y n.

Resolución:
Se deduce que el mayor número capicúa será de la forma: $\overline{mnm}$;
ya que: $\overline{abcd}$. m > $\overline{abcd}$. n

Luego:

$$\begin{array}{r l} \overline{a\ b\ c\ d} & \times \\ \overline{m\ n\ m} & \\ \hline 7\ 0\ 6\ 8 & \longleftarrow m\ .\ \overline{abcd} \\ 4\ 7\ 1\ 2\ \ & \longleftarrow n\ .\ \overline{abcd} \\ 7\ 0\ 6\ 8\ \ \ \ & \longleftarrow m\ .\ \overline{abcd} \\ \hline 7\ 6\ 0\ 9\ 8\ 8 & \end{array}$$

∴ La suma de cifras del producto es: 38

9 Aumentando en 9 los dos factores de un producto, el resultado aumenta en 549. Halla el menor factor, si la diferencia de ellos es 18.

Resolución:
Sean los factores a y b.
$\Rightarrow a\ .\ b = P$

$$(a+9)(b+9) = P + 549$$
$$ab + 9a + 9b + 81 = P + 549$$
$$P + 9(a+b) = P + 468$$

Luego: $a + b = 52$
$a - b = 18$ (dato)

Resolviendo: $a = 35 \wedge b = 17$

∴ El menor factor es 17.

10 Halla un número entero N, el mayor posible, tal que al dividirlo entre 50 se obtiene un resto que es igual al triple del cociente respectivo.

Resolución:
Del enunciado planteamos:

$$\begin{array}{l|l} N & 50 \\ \hline 3q & q \end{array} \qquad \Rightarrow N = 50q + 3q$$
$$N = 53q \quad ...(I)$$

Como N tiene que ser el mayor posible, entonces q tiene que ser el mayor posible.
Sabemos: $r < d$
$3q < 50$
$q < 16,6...$

Entonces el máximo cociente entero será 16.
Reemplazando en (I):

$N = 53q = 53(16) = 848$

11 En una división inexacta al resto por defecto le falta 15 unidades para ser igual al divisor, al resto por exceso le falta 10 unidades para ser igual a su respectivo cociente. Halla el dividendo si la relación de los restos por defecto y exceso es de 3 a 5.

Resolución:

Por defecto	Por exceso	Sabemos:
D | 8n ; (3n) q	D | 8n ; (5n) q + 1	$r + r_e = d$; $3n + 5n = d$; $8n = d$

Del enunciado:
$3n + 15 = 8n \Rightarrow n = 3$
Además: $15 + 10 = q + 1 \Rightarrow q = 24$
Luego: $D = dq + r$
$\Rightarrow D = 8(3)(24) + 3(3)$
∴ $D = 585$

12 La suma de los 4 términos de una división es 425. Si se multiplica por 5 el dividendo y el divisor y se vuelve a efectuar la operación, la suma de los términos sería 2073. Halla el cociente respectivo.

Resolución:
$D + d + q + r = 425$ ...(1)
Sabemos: $D = dq + r$
$5D = (5d)q + 5r$ (dato)
$5D + 5d + q + 5r = 2073$ ...(2)

Multiplicamos (1) por 5:
$5D + 5d + 5q + 5r = 2125$ ...(3)

Restando: (3) – (2): $4q = 52 \Rightarrow q = 13$

13 ¿Cuántos números de la siguiente forma existen?

$$\overline{a\left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{b}{2}\right)}_{(14)}$$

Resolución:
Para que el número de la forma: $\overline{a\left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{b}{2}\right)}_{(14)}$ exista, cada cifra debe cumplir ciertas condiciones:

I. $0 < a < 14 \wedge$ a es par
II. $0 \leq b < 14 \wedge$ b es par

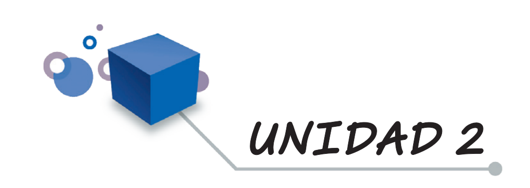
Luego:
a puede ser: 2; 4; 6; 8; 10 y 12 ⇒ 6 valores
b puede ser: 0; 2; 4; 6; 8; 10 y 12 ⇒ 7 valores

Entonces: $\overline{a\left(\frac{a}{2}\right)b\left(\frac{b}{2}\right)}_{(14)}$

Cantidad de valores: ↓ 6 (a), ↓ 7 (b)

n.° total de números: 6 . 7 = 42

Por lo tanto, existen 42 números.



UNIDAD 2

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

Es la parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para que sea divisible por otro.

Nota

Si A es múltiplo de B, también se denota así:

$A = mB$ o $A = \overset{\circ}{B}$

CONCEPTOS PREVIOS

Divisibilidad

Un número entero A es divisible por otro número entero positivo B si al dividir A entre B el cociente es entero y el residuo igual a cero.

Multiplicidad

Un número entero A es múltiplo de otro número entero positivo B, si existe un tercer número entero k, tal que al multiplicarlo por B resulta el número A. Es decir:

$$A = Bk$$

Observación

Que un número entero N sea múltiplo de 9 ($N = \overset{\circ}{9}$) significa que N es igual a 9 por un número entero.

De lo anterior se puede concluir que ambos conceptos son equivalentes, es decir:

$$\begin{array}{c|l} A & B \\ \hline & k \end{array} \Leftrightarrow A = Bk \quad ; A, k \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{Z}^+$$

Si A es múltiplo de B su notación será: $A = \overset{\circ}{B}$, B es el módulo.

Observaciones:

1. Todo número $\mathbb{Z}^+$ es divisible por sí mismo y por la unidad.
2. El cero es múltiplo de todo número $\mathbb{Z}^+$.
3. Todo número $\mathbb{Z}^+$ mayor que 1, posee como mínimo dos divisores: el mismo número y la unidad.
4. La cantidad de divisores $\mathbb{Z}^+$ de un número entero, es limitado.
5. La cantidad de múltiplos con respecto a cierto módulo en $\mathbb{Z}^+$, es ilimitado.

Ejemplos:

Determina por extensión:

1. El conjunto de divisores de 45.
2. El conjunto de múltiplos de 8.

Resolución:

1. Sea D el conjunto de divisores de 45, entonces:
   D = {1; 3; 5; 9; 15; 45}
2. Sea M el conjunto de múltiplos de 8, entonces:
   M = {...; –24; –16; –8; 0; 8; 16; 24; ...}

Atención

Si no nos dicen nada acerca del residuo, se considera residuo por defecto.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS NO DIVISIBLES CON RESPECTO AL MISMO MÓDULO

Cuando un número entero A no es divisible por otro número entero positivo B, es decir, la división es inexacta, se presentan dos casos:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{c\|l} A & B \\ \hline r & q \end{array}$	$\begin{array}{c\|l} A & B \\ \hline r_e & q+1 \end{array}$
Entonces: $A = B \times q + r$	Entonces: $A = B \times (q+1) - r_e$
Se denota: $A = \overset{\circ}{B} + r$	Se denota: $A = \overset{\circ}{B} - r_e$

Además, en la división entera se cumple que $r + r_e = B$, por lo tanto, en el caso de divisibilidad tendremos:

$$r + r_e = \overset{\circ}{B}$$

Ejemplos:

- $47 = 9(5) + 2 = \overset{\circ}{9} + 2$ o $47 = 9(6) - 7 = \overset{\circ}{9} - 7$; entonces $2 + 7 = \overset{\circ}{9}$
- $104 = 10(10) + 4 = \overset{\circ}{10} + 4$ o $104 = 10(11) - 6 = \overset{\circ}{10} - 6$; entonces $4 + 6 = \overset{\circ}{10}$

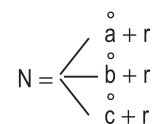
PRINCIPIOS BÁSICOS DE DIVISIBILIDAD

Las operaciones aritméticas elementales respecto a los múltiplos de un número son: adición, sustracción, multiplicación y potenciación.

Adición	Sustracción	Multiplicación	Potenciación
$\overset{\circ}{n}+\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$	$\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$	Si $p=\overset{\circ}{n}$, entonces: 1. $p\times q=\overset{\circ}{n}$, $q\in\mathbb{Z}$ 2. $p\times q=\overset{\circ}{q}$, $q\in\mathbb{Z}^+$ 3. $p\times q=\overset{\circ}{\overline{n\times q}}$, $q\in\mathbb{Z}^+$	Si $A=\overset{\circ}{n}\wedge k\in\mathbb{Z}^+$, entonces: $A^k=\overset{\circ}{n}$

Propiedades

1. Si $a+b=\overset{\circ}{n}$, entonces se presentan dos casos:
   - $a=\overset{\circ}{n}\wedge b=\overset{\circ}{n}$
   - $a=\overset{\circ}{n}+r\ \wedge\ b=\overset{\circ}{n}-r$
2. Si $a-b=\overset{\circ}{n}$, entonces se presentan dos casos:
   - $a=\overset{\circ}{n}\wedge b=\overset{\circ}{n}$
   - $a=\overset{\circ}{n}+r\wedge b=\overset{\circ}{n}+r$
3. $(\overset{\circ}{n}+a)\times(\overset{\circ}{n}+b)\times(\overset{\circ}{n}+c)=\overset{\circ}{n}+a\times b\times c$
4. $(\overset{\circ}{n}+r)^k=\overset{\circ}{n}+r^k$, $k\in\mathbb{Z}^+$
5. $$(\overset{\circ}{n}-r)^k=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+r^k, \text{ si k es par}\\ \overset{\circ}{n}-r^k, \text{ si k es impar}\end{cases}$$
6. $$\overline{abcd}_{(n)}=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+d\\ \overset{\circ}{n^2}+\overline{cd}_{(n)}\\ \overset{\circ}{n^3}+\overline{bcd}_{(n)}\end{cases}$$
7. $(\text{impar})^{(\text{par})}=\overset{\circ}{8}+1$
8. Todo número entero positivo es múltiplo de sus divisores enteros positivos.
9. Si:



$$N=\begin{cases}\overset{\circ}{a}\\ \overset{\circ}{b}\\ \overset{\circ}{c}\end{cases}$$

Entonces: $N=\overset{\circ}{\overline{MCM(a;\,b;\,c)}}$

10. Si:

$$N=\begin{cases}\overset{\circ}{a}+r\\ \overset{\circ}{b}+r\\ \overset{\circ}{c}+r\end{cases}$$

Entonces: $N=\overset{\circ}{\overline{MCM(a;\,b;\,c)}}+r$

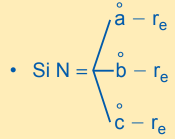
Observación

- Si $A=\overset{\circ}{n}+1$, entonces

$A^k=\overset{\circ}{n}+1;\ k\in\mathbb{Z}^+$

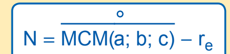
- Si $A=\overset{\circ}{n}-1$; entonces:

$$A_k=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+1; \text{ si k es par}\\ \overset{\circ}{n}-1; \text{ si k es impar}\end{cases}$$



- $$\text{Si } N=\begin{cases}\overset{\circ}{a}-r_e\\ \overset{\circ}{b}-r_e\\ \overset{\circ}{c}-r_e\end{cases}$$

Entonces:



$N=\overset{\circ}{\overline{MCM(a;\,b;\,c)}}-r_e$

Ejemplo:

En un barco había 720 personas. Si al ocurrir un naufragio, se observa que de los sobrevivientes, 3/13 fuman, 2/5 son casados y los 2/11 son ingenieros; determina cuántas personas murieron en dicho accidente.

Resolución:

Sea S el número de sobrevivientes:

Fuman: $\frac{3S}{13}\Rightarrow S=\overset{\circ}{13}$

Casados: $\frac{2S}{5}\Rightarrow S=\overset{\circ}{5}$

Ingenieros: $\frac{2S}{11}\Rightarrow S=\overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow S=\overset{\circ}{715}$

Luego:

$S=715<720$

$\therefore$ En el accidente murieron $720-715=5$ personas.

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Sean A y B dos números enteros diferentes de cero. Si $A\times B=\overset{\circ}{n}$ y, B y n tienen como único divisor común a la unidad, entonces $A=\overset{\circ}{n}$.

Ejemplos:

- $4N=\overset{\circ}{7}\Rightarrow N=\overset{\circ}{7}$
- $15N=\overset{\circ}{20}\Rightarrow 15N=20k$

$3N=4k$

$3N=\overset{\circ}{4}$

$N=\overset{\circ}{4}$

- $6N=\overset{\circ}{35}+18\Rightarrow 6(N-3)=\overset{\circ}{35}$

$N-3=\overset{\circ}{35}$

$N=\overset{\circ}{35}+3$

Nota

Ejemplo:

$10N=\overset{\circ}{18}+14$

$5N=\overset{\circ}{9}+7$

$5N=\overset{\circ}{9}+7+18$

$5N-25=\overset{\circ}{9}$

$5(N-5)=\overset{\circ}{9}$

$N-5=\overset{\circ}{9}$

$\therefore\ N=\overset{\circ}{9}+5$

RESTOS POTENCIALES

Se llaman restos potenciales de un entero E mayor que 1, respecto a un módulo m, a los residuos que deja la sucesión de potencias enteras y positivas de E al ser divididas entre el módulo m. Entonces:

$$E^0 = \overset{\circ}{m} + 1;\ E^1 = \overset{\circ}{m} + r_1;\ E^2 = \overset{\circ}{m} + r_2;\ E^3 = \overset{\circ}{m} + r_3;\ ...$$

Donde 1; r_1; r_2; r_3; ..., son los restos potenciales de E respecto al módulo m.
Ejemplo:

Calcula los restos potenciales de 16 respecto al módulo 9.

Resolución:

$16^0 = \overset{\circ}{9} + 1$
$16^1 = \overset{\circ}{9} + 7$
$16^2 = \overset{\circ}{9} + 4$
$16^3 = \overset{\circ}{9} + 1$
$16^4 = \overset{\circ}{9} + 7$
$16^5 = \overset{\circ}{9} + 4$
$16^6 = \overset{\circ}{9} + 1$
$16^7 = \overset{\circ}{9} + 7$
$\vdots$

Se observa que los residuos 1; 7 y 4 se repiten periódicamente; a esta cantidad de residuos diferentes se le llamará "gaussiano" (g).
En el problema:

$$g = 3$$

Observación

Usando el principio de Arquímedes, en una ecuación se puede dividir el residuo entre uno de los factores de la izquierda.

Ejemplos:

- $5H = \overset{\circ}{33} + 25$
  $H = \overset{\circ}{33} + 5$
- $8F = \overset{\circ}{14} + 10$ (todo entre 2)
  $4F = \overset{\circ}{7} + 7$

(Sumamos el módulo hasta que se pueda dividir entre 4)

$4F = \overset{\circ}{7} + 12$
$F = \overset{\circ}{7} + 3$

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Una ecuación diofántica es una ecuación donde tanto los términos constantes como las variables son números enteros y, además, es un sistema insuficiente; puede ser una sola ecuación con dos o más incógnitas, como también puede ser de primer o mayor grado.
La ecuación diofántica que estudiaremos es de la forma:

$$ax + by = c$$

La condición necesaria y suficiente para que esta ecuación tenga solución, es que los divisores comunes que tengan a y b, también deben ser divisores de c.

$$\text{Solución general} \begin{cases} x = x_0 - bt \\ y = y_0 + at \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Siendo x_0 e y_0 una solución particular de la ecuación.

Ejemplo:

Desarrolla la ecuación diofántica: $4x + 9y = 139$

Resolución:

Expresamos la ecuación en función de $\overset{\circ}{4}$:

$$4x + 9y = 139 \quad ...\ (I)$$
$$\overset{\circ}{4} + (\overset{\circ}{4} + 1)y = \overset{\circ}{4} + 3$$

Luego, tenemos:

$$y = \overset{\circ}{4} + 3$$
$$y_0 = 3 \text{ (solución particular)}$$

Reemplazamos en la ecuación (I):

$$4x_0 + 9(3) = 139$$
$$4x_0 + 27 = 139$$
$$x_0 = 28$$

Por lo tanto:

$$\text{Solución general} \begin{cases} x = 28 - 9t \\ y = 3 + 4t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dando valores enteros a t, se obtienen las demás soluciones para la ecuación.

t	x	y
–2	46	–5
–1	37	–1
0	28	3
1	19	7
2	10	11

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Un criterio de divisibilidad es una relación que deben cumplir las cifras de un determinado numeral para que este sea divisible por otro; si no lo es, nos permitirá calcular el residuo a partir de ellas. Cada sistema de numeración tiene sus propios criterios de divisibilidad y para conocerlos haremos uso de los restos potenciales.

Principales criterios de divisibilidad

Por 2	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} + e$. Si: $e = \overset{\circ}{2}$ $(e \in \{0; 2; 4; 6; 8\}) \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{2}$
Por 4	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} + \overline{de}$. Si: $\overline{de} = \overset{\circ}{4}$ $(\overline{de} \in \{00; 04; 08; 12; ...; 96\} \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{4}$
Por 8	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} + \overline{cde}$. Si: $\overline{cde} = \overset{\circ}{8}$ $(\overline{cde} \in \{000; 008; 016; ...; 992\}) \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{8}$
Por 5	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} + e$. Si: $e = \overset{\circ}{5}$ $(e \in \{0; 5\}) \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{5}$
Por 25	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} + \overline{de}$. Si: $\overline{de} = \overset{\circ}{25}$ $(\overline{de} \in \{00; 25; 50; 75\}) \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{25}$
Por 125	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} + \overline{cde}$. Si: $\overline{cde} = \overset{\circ}{125}$ $(\overline{cde} \in \{000; 125; 250; ...; 875\}) \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{125}$
Por 3	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{3} + a + b + c + d + e$. Si $a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$ $[(a + b + c + d + e) \in \{3; 6; 9; 12; ...\}] \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{3}$
Por 9	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} + a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$. Si $a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$ $[(a + b + c + d + e) \in \{9; 18; 27; ...\}] \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{9}$
Por 11	$\underset{+-+-+}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}} = \overset{\circ}{11} + e - d + c - b + a$. Si: $a - b + c - d + e = \overset{\circ}{11} \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{11}$ (signos de derecha a izquierda)
Por 7	$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h} = \overset{\circ}{7} + \underbrace{(3a + b) - (2c + 3d + e) + (2f + 3g + h)}_{N}$ 3 1 2 3 1 2 3 1 + − + Si $N = \overset{\circ}{7} \Rightarrow \overline{abcdefgh} = \overset{\circ}{7}$
Por 13	$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h} = \overset{\circ}{13} \underbrace{- 3a + (b + 4c + 3d) - (e + 4f + 3g) + h}_{N}$ 3 1 4 3 1 4 3 1 − + − + Si: $N = \overset{\circ}{13} \Rightarrow \overline{abcdefgh} = \overset{\circ}{13}$
Por 33	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{33} + a + \overline{bc} + \overline{de}$. Si: $a + \overline{bc} + \overline{de} = \overset{\circ}{33} \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{33}$
Por 99	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{99} + a + \overline{bc} + \overline{de}$. Si: $a + \overline{bc} + \overline{de} = \overset{\circ}{99} \Rightarrow \overline{abcde} = \overset{\circ}{99}$
Por n – 1 en base n	$\overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{\overline{(n-1)}} + a + b + c + d + e$. Si: $a + b + c + d + e = \overset{\circ}{\overline{(n-1)}}$ $\Rightarrow \overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{\overline{(n-1)}}$
Por n + 1 en base n	$\underset{+-+-+}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}_{(n)}} = \overset{\circ}{\overline{(n+1)}} + a - b + c - d + e$. Si: $a - b + c - d + e = \overset{\circ}{\overline{(n+1)}}$ $\Rightarrow \overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{\overline{(n+1)}}$

Nota

- Un número será divisible por 2^n, si sus n últimas cifras son $\overset{\circ}{2^n}$.
- Un número será divisible por 5^n, si sus n últimas cifras son $\overset{\circ}{5^n}$.

Ejemplos:

- Dado $M = \overline{ab275}$, veamos si es divisible por 25.
  Como $25 = 5^2$
  $M = \overset{\circ}{25} + 75$
  $M = \overset{\circ}{25} + 25$
  ∴ M es divisible por 25.
- $P = \overline{abcd724}$, ¿es divisible por 8?
  $P = \overset{\circ}{8} + 726$
  $P = \overset{\circ}{8} + 720 + 6$
  $P = \overset{\circ}{8} + 8 + 6$
  $P = \overset{\circ}{8} + 6$
  ∴ El residuo de P entre 8 es 6.

Atención

En el criterio por 8 se puede observar:

$N = \overline{abcdef} = \overset{\circ}{8} + \overline{def}$

Por descomposición polinómica:

$N = \overset{\circ}{8} + 100d + 10e + f$

$N = \overset{\circ}{8} + (\overset{\circ}{8} + 4)d + (\overset{\circ}{8} + 2)e + f$

$N = \overset{\circ}{8} + \underbrace{4d + 2e + f}_{k}$

Si: $k = \overset{\circ}{8} \Rightarrow N = \overset{\circ}{8}$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántos números de 3 cifras en base 4 son múltiplos de 6?

Resolución:

Sea:

$N = \overline{abc}_{(4)}$, por dato $N = \overset{\circ}{6} = 6k$; $k \in Z$

Sabemos, por numeración, que:

$100_{(4)} \leq \overline{abc}_{(4)} \leq 333_{(4)}$

$16 \leq \underbrace{\overline{abc}_{(4)}} \leq 63$

$16 \leq 6k \leq 63$

$2,67 \leq k \leq 10,5$

$k: \underbrace{3; 4; 5; ...; 10}_{8 \text{ números}}$

∴ Por lo tanto, 8 números de tres cifras en base 4 son múltiplos de 6.

2 Si $\overline{8xy16} = \overset{\circ}{19} + 13$; halla la suma de todos los valores de $\overline{xy}$.

Resolución:

Realizamos la descomposición polinómica:

$\overline{8xy16} = \overset{\circ}{19} + 13$

$\underbrace{80016} + 10^2\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 13$

$(\overset{\circ}{19} + 7) + (\overset{\circ}{19} + 5)\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 13$

$7 + 5\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 13$

$5\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 6 + 19$

$5\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 25$

$\overline{xy} = \overset{\circ}{19} + 5 \Rightarrow \overline{xy}: 24; 43; 62; 81$

∴ Nos piden: $24 + 43 + 62 + 81 = 210$

3 Si x es el mayor entero comprendido entre 3000 y 4000 de modo que al ser dividido entre 18; 35 y 42 deja siempre un residuo igual 11, halla x.

Resolución:

Dato: $3000 < x < 4000$ ... (1)

Además:

$$x = \begin{cases} \overset{\circ}{18} + 11 \\ \overset{\circ}{35} + 11 \\ \overset{\circ}{42} + 11 \end{cases}$$

$x = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(18; 35; 42)}} + 11$

$x = \overset{\circ}{630} + 11 \Rightarrow x = 630t + 11$ ($t \in \mathbb{Z}$)

Reemplazando en (1):

$3000 < 630t + 11 < 4000$

$2989 < 630t < 3989$

$4,7... < t < 6,3... \Rightarrow t = 5; 6$

Luego:

Para $t = 5 \Rightarrow x = 3161$

$t = 6 \Rightarrow x = 3791$ (mayor) ✓

4 Halla el menor valor positivo de x si: $21x + 12 = \overset{\circ}{15}$

Resolución:

Se tiene:

$21x + 12 = \overset{\circ}{15}$

$\Rightarrow 21x + 12 = 15k$

Dividimos entre 3:

$7x + 4 = 5k$

$\Rightarrow 7x + 4 = \overset{\circ}{5}$

$7x = \overset{\circ}{5} + 1 + 55$

$7x - 56 = \overset{\circ}{5}$

$7(x - 8) = \overset{\circ}{5}$

Como 7 y 5 tienen como divisor común a la unidad, luego:

$x - 8 = \overset{\circ}{5}$

$x = \overset{\circ}{5} + 8$

$\Rightarrow x: 8; 13; 18; 23; 28; ...$

∴ El menor valor positivo de x es 8.

5 Si: $27\,464^{\overline{ab}} = \overset{\circ}{9} + 8$

Determina el mayor valor de $\overline{ab}$.

Resolución:

Observamos que: $27\,464 = \overset{\circ}{9} + 5$

Entonces: $27\,464^{\overline{ab}} = \overset{\circ}{9} + 5^{\overline{ab}} = \overset{\circ}{9} + 8$

Analizamos los restos potenciales:

$$\left.\begin{aligned} 5^0 &= \overset{\circ}{9} + 1 \\ 5^1 &= \overset{\circ}{9} + 5 \\ 5^2 &= \overset{\circ}{9} + 7 \\ 5^3 &= \overset{\circ}{9} + 8 \\ 5^4 &= \overset{\circ}{9} + 4 \\ 5^5 &= \overset{\circ}{9} + 2 \end{aligned}\right\} g = 6$$

$5^6 = \overset{\circ}{9} + 1$

⋮

$5^{\overset{\circ}{6}} = \overset{\circ}{9} + 1$

$5^{\overset{\circ}{6} + 1} = \overset{\circ}{9} + 5$

$5^{\overset{\circ}{6} + 2} = \overset{\circ}{9} + 7$

$5^{\overset{\circ}{6} + 3} = \overset{\circ}{9} + 8$

$5^{\overset{\circ}{6} + 4} = \overset{\circ}{9} + 4$

$5^{\overset{\circ}{6} + 5} = \overset{\circ}{9} + 2$

Como: $5^{\overline{ab}} = \overset{\circ}{9} + 8$

$\Rightarrow \overline{ab} = \overset{\circ}{6} + 3$

$\overline{ab}: 15; 21; ...; 99$

∴ El mayor valor de $\overline{ab}$ es 99.

6 Un comerciante tiene S/.1500 y decide comprar cajas de leche y aceite a S/.70 y S/.80 cada caja respectivamente. ¿De cuántas maneras se puede efectuar la compra?

Resolución:

Sean:
x: número de cajas de leche.
y: número de cajas de aceite.

Del enunciado:

$$70x + 80y = 1500$$

$$7x + 8y = 150 \quad \text{... (I)}$$

Expresamos la ecuación en función de $\overset{\circ}{7}$:

$$\overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)y = \overset{\circ}{7} + 3$$

$$y = \overset{\circ}{7} + 3$$

$$\Rightarrow y_0 = 3$$

Reemplazamos en (I):

$$7x_0 + 8(3) = 150$$

$$7x_0 = 150 - 24$$

$$x_0 = 18$$

Ahora, determinamos todas las soluciones posibles a partir $x_0 = 18$; $y_0 = 3$:

$$\begin{cases} x = 18 - 8t \\ y = 3 + 7t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

x	y
18	3
10	10
2	17

∴ La compra se puede efectuar de tres maneras diferentes.

7 Un número posee 26 cifras, la primera de izquierda a derecha es 8 y cada una de las restantes es 6. ¿Cuál será la cifra de las unidades del número equivalente a él, en base 7?

Resolución:

Del enunciado:

$$\underbrace{866\ldots66}_{26\text{ cifras}} = \overline{a\ldots bx}_{(7)} = \overset{\circ}{7} + x$$

Aplicando divisibilidad por 7, agrupados de 6 en 6 se eliminan, entonces al final queda:

$$\begin{array}{l} 8\ 6\ 6\ 6\ 6 \ldots 6\ 6\ 6 \\ 3\ 1\ \underbrace{2\ 3\ 1}_{-}\ \ \underbrace{2\ 3\ 1}_{+} \end{array}$$

24 cifras

$$6 \times 1 + 8 \times 3 = 30 = \overset{\circ}{7} + 2 \Rightarrow x = 2$$

∴ La cifra de las unidades del número equivalente en base 7 es 2.

8 Calcula a + b + c, sabiendo que:
$\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{1125}$

Resolución:

Tenemos: $\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{1125} \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{125} \end{cases}$

Divisibilidad por 125:

$\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{125}$

$$\overline{8bc} = \overset{\circ}{125} \Rightarrow \overline{8bc} = 125 \,.\, 7$$

$$\Rightarrow \overline{8bc} = 875$$

$$\Rightarrow b = 7 \quad \wedge \quad c = 5$$

Divisibilidad por 9:

$$\overline{3a8bc} = \overset{\circ}{9}$$

$$3 + a + 8 + b + c = \overset{\circ}{9}$$

$$a + 5 = \overset{\circ}{9} \Rightarrow a = 4$$

$$\therefore a + b + c = 16$$

9 Si: $\overline{aba2b} = \overset{\circ}{99}$
Halla: a + b

Resolución:

Tenemos: $\overline{aba2b} = \overset{\circ}{99} \begin{cases} \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases}$

Divisibilidad por 11:

$$\overline{\overset{+}{a}\,\overset{-}{b}\,\overset{+}{a}\,\overset{-}{2}\,\overset{+}{b}} = \overset{\circ}{11}$$

$$a - b + a - 2 + b = \overset{\circ}{11}$$

$$a = \overset{\circ}{11} + 1 \Rightarrow a = 1$$

Divisibilidad por 9:

$$\overline{aba2b} = \overset{\circ}{9}$$

$$2a + 2b + 2 = \overset{\circ}{9}$$

$$b = \overset{\circ}{9} - 2 \Rightarrow b = 7$$

Nos piden: a + b = 1 + 7 = 8

10 ¿Cuál es el menor número de tres cifras que es igual a 27 veces la suma de sus cifras? Da como respuesta la cifra de las decenas.

Resolución:

Por dato del problema: $\overline{abc} = 27(a + b + c)$

Veamos que $\overline{abc}$ es múltiplo de 9, entonces:

$a + b + c = \overset{\circ}{9}$

Si a + b + c = 9 (mínimo), entonces:

$\overline{abc} = 27 \,.\, 9 = 243$

Piden la cifra de decenas: 4

NÚMEROS PRIMOS – MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Los números enteros positivos pueden ser clasificados de acuerdo a ciertas características determinadas. Observemos el siguiente cuadro:

Números	Divisores
1	1
2	1; 2
3	1; 3
4	1; 2; 4
5	1; 5
6	1; 2; 3; 6
7	1; 7
8	1; 2; 4; 8
⋮	

Podemos notar que:
- La unidad es el único número que posee un solo divisor.
- Hay números que poseen solo dos divisores.
- Hay números que poseen 3; 4; 5 o más divisores.

De lo anterior, los números enteros positivos, según la cantidad de divisores, se clasifican en números simples y números compuestos.

Nota

$\mathbb{Z}^+ =$ Números simples (• La unidad • Números primos); Números compuestos

Nota

Todo número compuesto posee por lo menos un divisor primo.

NÚMEROS SIMPLES

Son aquellos números enteros positivos que tienen a lo más dos divisores.

La unidad

Es el único número entero positivo que posee un solo divisor.

Números primos

Llamados también primos absolutos. Son aquellos números que poseen únicamente dos divisores: la unidad y el mismo número.
Estos son: 2; 3; 5; 7; 11; 13; ...

Recuerda

El menor número compuesto es el 4.

NÚMEROS COMPUESTOS

Son aquellos números enteros positivos que tienen más de dos divisores.
Estos son: 4; 6, 8; 9; 10; 12; ...

Observaciones:
1. El conjunto de los números primos es infinito.
2. El 2 es el único número primo par.
3. Los números 2 y 3 son los únicos números primos consecutivos.
4. Los números 3; 5 y 7 forman la única terna de números impares consecutivos y primos a la vez.
5. Todo número primo mayor que 2 es de la forma $\overset{\circ}{4} + 1$ o $\overset{\circ}{4} - 1$.
6. Todo número primo mayor que 3 es de la forma $\overset{\circ}{6} + 1$ o $\overset{\circ}{6} - 1$.

Atención
- Si un número es $\overset{\circ}{4} \pm 1$; no necesariamente es primo.
- Si un número es $\overset{\circ}{6} \pm 1$; no necesariamente es primo.

ALGORITMO PARA DETERMINAR SI UN NÚMERO ES PRIMO

1. Se extrae la raíz cuadrada al número dado; si es exacta, se determina que el número no es primo.
2. Si la raíz cuadrada no es exacta, se considera a todos los números primos menores o iguales que la parte entera de la raíz.
3. Se divide de menor a mayor el número dado entre cada número primo considerado.
4. Si en dichas divisiones, se obtiene al menos una exacta, el número no es primo y si todas las divisiones son inexactas, entonces el número es primo.

Ejemplo:
Determina si el número 173 es un número primo.

Resolución:
Extraemos la raíz cuadrada a dicho número: $\sqrt{173} \approx 13{,}152$
Entonces, los números primos menores o iguales a la parte entera de dicha raíz, son: 2; 3; 5; 7; 11; 13.

Al dividir 173 entre cada uno de los números primos considerados, se tiene:

$$173 \begin{cases} \overset{\circ}{2}+1 \\ \overset{\circ}{3}+2 \\ \overset{\circ}{5}+3 \\ \overset{\circ}{7}+5 \\ \overset{\circ}{11}+8 \end{cases}$$

Como en ningún caso las divisiones son exactas, entonces 173 es un número primo.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

Se les denomina también primos relativos o coprimos y son aquellos números que tienen como único divisor común a la unidad.

Ejemplo:
¿Los números 21; 15 y 8 son PESÍ?

Resolución:
Analizamos sus divisores:

21: 1; 3; 7; 21
15: 1; 3; 5; 15
8: 1; 2; 4; 8

Se observa que 1 es el único divisor común a dichos números.
∴ 21; 15 y 8 son números PESÍ.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA (TEOREMA DE GAUSS)

Todo número mayor que 1 se puede descomponer como el producto de factores primos diferentes entre sí elevados a ciertos exponentes enteros positivos. Esta descomposición es única y es llamada también descomposición canónica.

Ejemplos:

- $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$
- $315 = 3^2 \times 5 \times 7$
- $792 = 2^3 \times 3^2 \times 11$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Sea N un número entero positivo cuya descomposición canónica es: $N = A^{\alpha} \times B^{\beta} \times C^{\gamma}$

Entonces, se tiene:

Cantidad de divisores CD(N)	Suma de divisores SD(N)
$CD(N) = (\alpha+1) \times (\beta+1) \times (\gamma+1)$ Ejemplo: Determina la cantidad de divisores de 900. Resolución: Como $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$, entonces: $CD(900) = (2+1) \times (2+1) \times (2+1) = 27$	$SD(N) = \frac{A^{\alpha+1}-1}{A-1} \times \frac{B^{\beta+1}-1}{B-1} \times \frac{C^{\gamma+1}-1}{C-1}$ Ejemplo: Determina la suma de divisores de 360. Resolución: Como $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, entonces: $SD(360) = \frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^2-1}{5-1} = 1170$
Suma de las inversas de divisores SID(N)	**Producto de divisores PD(N)**
$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$ Ejemplo: Halla la suma de las inversas de los divisores de 45. Resolución: Como $45 = 3^2 \times 5$ y además: $SD(45) = \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^2-1}{5-1} = 78$ Entonces: $SID(45) = \frac{78}{45} = 1{,}7\widehat{3}$	$PD(N) = N^{\frac{CD(N)}{2}}$ Ejemplo: Halla el producto de divisores de 20. Resolución: Como $20 = 2^2 \times 5$ y además: $CD(20) = (2+1) \times (1+1) = 6$ Entonces: $PD(20) = 20^{6/2} = 20^3 = 8000$

Observación:

- $CD_{propios} = CD(N) - 1$
- $CD_{primos} = CD_{simples} - 1$
- $CD(N) = CD_{simples} + CD_{compuestos}$

Nota

- Dos números enteros consecutivos siempre son PESÍ.
- Dos números enteros impares consecutivos siempre son PESÍ.

Observación

Un grupo de números se dice que es PESÍ 2 a 2, si al ser tomados de 2 en 2, cada par de números resulta ser PESÍ.

Ejemplo: 9; 10 y 11

Nota

- **Divisores simples**
  Son todos aquellos divisores que a la vez son números simples.
- **Divisores compuestos**
  Son todos aquellos divisores que a la vez son números compuestos.
- **Divisores primos**
  Son todos aquellos divisores que a la vez son números primos absolutos.
- **Divisores propios**
  Son todos los divisores de un número excepto el mismo número.

Observación

- SD(N) que sean $\overset{\circ}{m}$ $= m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)$
- SID(N) que sean $\overset{\circ}{m}$ $= \frac{SD\left(\frac{N}{m}\right)}{N}$
- PD(N) que sean $\overset{\circ}{m}$ $= m^{CD\left(\frac{N}{m}\right)} \times PD\left(\frac{N}{m}\right)$

FUNCIÓN DE EULER O INDICADOR DE UN NÚMERO $\mathbb{Z}^+$

Sea N un número entero positivo cuya descomposición canónica es: $N = A^{\alpha} \times B^{\beta} \times C^{\gamma}$
La función de Euler se define por:

$$\phi(N) = A^{\alpha-1} \times (A-1) \times B^{\beta-1} \times (B-1) \times C^{\gamma-1} \times (C-1)$$

Este valor nos indica la cantidad de números enteros positivos primos entre sí con N, que existen entre dos múltiplos consecutivos de N.

Ejemplo: Calcula el indicador de 12.

Resolución:
Como $\phi(12) = 2^1 \times (2-1) \times 3^0 \times (3-1) = 4$; entonces, entre dos múltiplos consecutivos de 12 existen 4 números enteros positivos primos entre sí con 12. Es decir:

0 $\underbrace{1\ 5\ 7\ 11}_{\mathbb{Z}^+ \text{ PESÍ con } 12}$ **12** $\underbrace{13\ 17\ 19\ 23}_{\mathbb{Z}^+ \text{ PESÍ con } 12}$ **24** $\underbrace{25\ 29\ 31\ 35}_{\mathbb{Z}^+ \text{ PESÍ con } 12}$ **36**

Nota

- Número de maneras de descomponer un número entero como el producto de dos de sus divisores
  - $\frac{CD(N)}{2}$; si N es par
  - $\frac{CD(N)+1}{2}$; si N es impar
- Si N es PESÍ con p y p es primo, entonces N será PESÍ con p^{α}.
- Si N es primo, entonces: $\phi(N) = N - 1$

TEOREMA DE EULER

Si a y m son dos números enteros positivos primos entre sí, donde m > 1; entonces: $a^{\phi(m)} = \overset{\circ}{m} + 1$
Ejemplo:
Calcula el residuo de dividir 385^{24} entre 72.

Resolución:
Se observa que 385 y 72 son primos entre sí, además: $\phi(72) = 2^{3-1} \times (2-1) \times 3^{2-1} \times (3-1) = 24$

Luego, por el teorema de Euler se cumple: $385^{24} = 385^{\phi(72)} = \overset{\circ}{72} + 1$

Por lo tanto, el residuo de dividir 385^{24} entre 72 es 1.

Atención

Si N > 1 entonces la suma de todos los $\mathbb{Z}^+$ menores o iguales que N y PESÍ con N es:

$$S = \frac{N \times \phi(N)}{2}$$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea N un número entero positivo. La descomposición canónica del factorial de N está dada por:

$$N! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \ldots$$

Si queremos hallar el exponente de uno de sus divisores primos, debemos efectuar las divisiones sucesivas, dividiendo dicho número entre el factor primo (del cual se quiere conocer su exponente) y luego, sumamos los cocientes obtenidos.

Ejemplo:
Halla la descomposición canónica de 11!.

Resolución:
Tenemos: $11! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 11^e$

Luego:

- 11 ÷ 2 = 5; 5 ÷ 2 = 2; 2 ÷ 2 = 1 → $a = 5 + 2 + 1 = 8$
- 11 ÷ 3 = 3; 3 ÷ 3 = 1 → $b = 3 + 1 = 4$
- 11 ÷ 5 = 2 → $c = 2$
- 11 ÷ 7 = 1 → $d = 1$
- 11 ÷ 11 = 1 → $e = 1$

$11! = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11$

Observación

Si: $N! = \overline{ab...xy\underbrace{00...00}_{k \text{ cifras}}}_{(n)}$

Entonces, k es el exponente del mayor divisor primo de n, en la descomposición canónica de N!.

TEOREMA DE WILSON

Si p es un número primo, entonces se cumple:

$$(p-1)! = \overset{\circ}{p} - 1$$

Ejemplo:
Calcula el residuo de dividir $60!^{18!}$ entre 61.

Resolución:
Por el teorema de Wilson: $60! = \overset{\circ}{61} - 1$

Luego:

$60!^{18!} = (\overset{\circ}{61} - 1)^{18!} = \overset{\circ}{61} + 1$

Por lo tanto, el residuo de dividir $60!^{18!}$ entre 61 es 1.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Máximo común divisor (MCD)

Dado un conjunto de números enteros positivos, el MCD de dichos números es el mayor número entero positivo que los contiene exactamente en ellos, es decir, es un divisor común al conjunto de números, siendo el mayor de estos.

Ejemplo:
Para los números 6; 12 y 18, sus divisores enteros positivos son:

6 : (1); (2); (3); (6)
12: (1); (2); (3); 4 ; (6); 12
18: (1); (2); (3); (6); 9 ; 18

Divisores comunes: 1; 2; 3; (6)
Mayor

∴ MCD(6; 12; 18) = 6

Nota

Cantidad de divisores comunes de dos o más números = Cantidad de divisores del MCD de dichos números

Mínimo común múltiplo (MCM)

El mínimo común múltiplo de un conjunto de números es el menor número entero positivo que los contiene exactamente. Es decir, es un múltiplo común al conjunto de números, siendo el menor de estos múltiplos comunes.

Ejemplo:
Para los números 4; 3 y 6; sus múltiplos enteros positivos son:

4: 4 ; 8 ; (12); 16 ; 20 ; (24); 28 ; 32 ; (36); 40 ; ...
3: 3 ; 6 ; 9 ; (12); 15; 18 ; 21 ; (24); 27 ; 30 ; 33 ; (36); ...
6: 6 ; (12); 18 ; (24); 30; (36); 42 ; 48 ; ...

Múltiplos comunes: (12); 24; 36; ...
Menor

∴ MCD(4; 3; 6) = 12

Nota

Los múltiplos comunes de un conjunto de números, son también múltiplos de su MCM.

MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD Y EL MCM

Por descomposición simultánea	
MCD	**MCM**
Se extrae de los números, todos los factores comunes hasta obtener números PESÍ. El producto de los factores extraídos es el MCD de dichos números. Ejemplo: 210 - 350 - 280 | 10 21 - 35 - 28 | 7 (3) - (5) - (4) PESÍ MCD(210; 350; 280) = 70	Se extrae de los números, todos los factores comunes y no comunes hasta obtener la unidad en cada uno. El producto de los factores extraídos es el MCM de dichos números. Ejemplo: 210 - 350 - 280 | 70 3 - 5 - 4 | 3 1 - 5 - 4 | 4 1 - 5 - 1 | 5 1 - 1 - 1 MCD(210; 350; 280) = 4200
Por descomposición canónica	
MCD	**MCM**
El MCD de dichos números es el producto de todos los divisores primos comunes elevados cada uno a su menor exponente. Ejemplo: Si: $A = 2^6 \times 3^7 \times 5^{10}$; $B = 2^8 \times 3^4 \times 5^2$; $C = 2^9 \times 3^3 \times 5^4$ Entonces: $MCD(A; B; C) = 2^6 \times 3^3 \times 5^2$	El MCM de dichos números es el producto de todos los divisores primos comunes y no comunes elevados cada uno a su mayor exponente. Ejemplo: De lo anterior: $MCM(A; B; C) = 2^9 \times 3^7 \times 5^{10}$

Observación

El algoritmo de Euclides, planteado hace más de 2000 años por los antiguos griegos, en el clásico libro *Los elementos*, en realidad exponía que el máximo común divisor de dos números a y b, es igual al máximo común divisor del número menor y la diferencia de ambos:

MCD(a; b) = MCD(b; a – b)

Método de divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Consiste en aplicar reiteradas veces el siguiente teorema:

Si $D = d \times q + r$ entonces $MCD(D; d) = MCD(d; r)$

Para hallar el MCD de dos números, dividimos el mayor de los números entre el menor, luego el divisor pasa a ser el dividendo y el residuo obtenido pasa a ser divisor; efectuamos este proceso hasta que la división resulte exacta; el último divisor, será el MCD de dichos números.

El procedimiento se representa mediante el siguiente esquema:

Cocientes		q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
	A	B	r_1	r_2	r_3	r_4
Residuos		r_1	r_2	r_3	r_4	0

$\Rightarrow MCD(A; B) = r_4$

Atención

(A + B) y A . B son PESÍ, si y solo si A y B son PESÍ.

Entonces:
Si A y B son PESÍ o
(A + B) y A . B son PESÍ:
$MCD(A; B) = MCD(A + B; A . B)$

Ejemplo:
Halla el MCD(403; 91) por el método del algoritmo de Euclides.

Resolución:
Tenemos:

	4	2	3
403	91	39	13
	39	13	0

$\therefore MCD(403; 91) = 13$

PROPIEDADES DEL MCD Y EL MCM

1. Solo para dos números A y B se cumple que:
$MCD(A; B) \times MCM(A; B) = A \times B$

2. Si $MCD(A; B; C) = d$ y $MCM(A; B; C) = m$, entonces:
$A = d \times p_1$, $B = d \times p_2$, $C = d \times p_3$ (p_1, p_2, p_3 son PESÍ)
$m = A \times q_1$, $m = B \times q_2$, $m = C \times q_3$ (q_1, q_2, q_3 son PESÍ)

3. Si $A = \overset{\circ}{B}$, entonces:
$MCD(A; B) = B$ y $MCM(A; B) = A$

4. Si A y B son PESÍ, entonces:
$MCD(A; B) = 1$ y $MCM(A; B) = A \times B$

5. $MCD(nA; nB; nC) = nMCD(A; B; C)$
$MCM(nA; nB; nC) = nMCM(A; B; C)$

6. $MCD\left(\frac{A}{K}; \frac{B}{K}; \frac{C}{K}\right) = \frac{MCD(A; B; C)}{K}$

$MCM\left(\frac{A}{K}; \frac{B}{K}; \frac{C}{K}\right) = \frac{MCM(A; B; C)}{K}$

7. $MCD(A^n; B^n; C^n) = [MCD(A; B; C)]^n$
$MCM(A^n; B^n; C^n) = [MCM(A; B; C)]^n$

8. Si A y B son PESÍ, A > B, entonces:
$MCD(A; A \pm B) = 1$
$MCD(B; A \pm B) = 1$

9. $MCD(n^a - 1; n^b - 1; n^c - 1) = n^{MCD(a; b; c)} - 1$

10. $MCD(A; B; C; D) = MCD[MCD(A; B); MCD(C; D)]$
$MCM(A; B; C; D) = MCM[MCM(A; B); MCM(C; D)]$

EFECTUAR

1. Para los números A y B se cumple:
$\frac{MCM(A; B)}{MCD(A; B)} = x$ y $MCM(A; B) + MCD(A; B) = y$
Halla el MCM(A; B) en función de: x e y.

2. Determina a + b, si el MCM de:
$\overline{(a-1)(2a-2)(a-1)}$ y $\overline{(a-1)(a-1)}$
es: $\overline{b(a+1)b}$

3. La distancia entre 2 líneas de una vereda es 1,20 m. Si se empieza a caminar pisando la raya con velocidad de 3 m/s y 75 cm de longitud de paso, ¿cuánto tiempo se debe caminar hasta pisar la raya por 34.ª vez, si se empezó a caminar con la derecha?

4. Al dividir por exceso a $\overline{abcde}$ por 12; 14; 16 y 18 se obtuvo 4; 6; 8 y 10 como residuos respectivos; y al dividirlo por 17 no se obtuvo residuo. ¿Cuántos valores puede tomar abcde?

1 Si el número $N = 12^m . 36^p$ tiene 30 divisores compuestos, ¿cuántos divisores tiene en total?

Resolución:

Sea: $N = 12^m . 36^p$
$N = 2^{2m+2p} . 3^{m+2p}$

Luego, este numeral tiene dos divisores primos, el 2 y el 3.

Por fórmula:
$CD(N) = CD_P + CD_c + 1$
$CD(N) = 2 + 30 + 1$
$CD(N) = 33$

2 Sabiendo que $M = 2^m . 3^3 . 5^n$ tiene 50 divisores, cuya suma de cifras es $\overset{\circ}{9}$ y 80 divisores cuya cifra de menor orden es par. Determina m + n.

Resolución:

$M = 2^m . 3^3 . 5^n$

Hallamos la cantidad de divisores cuya suma de cifras es $\overset{\circ}{9}$:
$3^2(2^m . 3 . 5^n)$

Cantidad de divisores $\overset{\circ}{9}$:
$(m + 1)(2)(n + 1) = 50$
$\Rightarrow (m + 1)(n + 1) = 25$ ...(1)

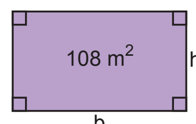
Hallamos la cantidad de divisores cuya cifra de menor orden es par:
$D(\overset{\circ}{2}) = 2(2^{m-1} . 3^3 . 5^n)$

Cantidad de divisores $\overset{\circ}{2}$:
$(m - 1 + 1)(3 + 1)(n + 1) = 80$
$\Rightarrow m(n + 1) = 20$ ...(2)

De (1) y (2):
$m = 4; n = 4$
$\therefore\ m + n = 8$

3 Cris desea cortar una madera en forma rectangular cuya superficie sea de 108 m^2. ¿De cuántas formas puede cortar Cris la madera, si sus dimensiones deben ser enteras?

Resolución:



Área: $b . h = 108$
$108 = 2^2 . 3^3$
$CD(108) = (2 + 1)(3 + 1)$
$CD(108) = 12$

Las formas de descomponer un número (N) como el producto de dos factores es:
$\dfrac{CD(N)}{2}$; si CD(N) es par.

Se cumple:
$\text{n.° de rectángulos} = \dfrac{CD(N)}{2}$; para CD(N) par

Entonces:
$\text{n.° de rectángulos} = \dfrac{(12)}{2} = 6$

$\therefore$ Tiene 6 formas de cortar la madera.

4 Si $N = \overline{mnpqr}_{(7)}$, donde $m + n + p + q + r \neq \overset{\circ}{2}$ y p es primo. Halla el residuo de dividir M entre p^5 si además:

$$p \neq 2^{2^n} + 1;\ n \in \mathbb{N}$$
$$M = N^{16} + N^{32} + N^{48} + ... + N^{352}$$

Resolución:

Como N es un número que expresado en una base impar (7), la suma de su cifras es impar $(m + n + p + q + r \neq \overset{\circ}{2})$; entonces N es impar.

Por dato, p es primo, entonces:

$N = \overline{mnpqr}_{(7)}$
↓
2
3
5

Por dato, $p \neq 2^{2^n} + 1;\ n \in \mathbb{N}$:
$\left.\begin{array}{l} n = 0 : p \neq 3 \\ n = 1 : p \neq 5 \end{array}\right\} \Rightarrow\ p = 2$

Luego, N es pesí con 2 y por propiedad N es pesí con 2^5; se cumple: $N^{\phi(2^5)} = \overset{\circ}{\overline{2^5}} + 1$

Ahora: $\phi(2^5) = 2^4 \times (2 - 1) = 16$
Luego:
$M = N^{\phi(2^5)} + [N^{\phi(2^5)}]^2 + [N^{\phi(2^5)}]^3 + ... + [N^{\phi(2^5)}]^{22}$
$M = \underbrace{(\overset{\circ}{32} + 1) + (\overset{\circ}{32} + 1) + (\overset{\circ}{32} + 1) + ... + (\overset{\circ}{32} + 1)}_{22\ \text{sumandos}}$
$M = \overset{\circ}{32} + 22$
$\therefore$ El residuo de dividir M entre 32 es 22.

5 Si N y 169 son primos entre sí y además:

$$59N^{156} = \overline{...xyzw}_{(13)}$$

¿En cuántos ceros termina $(z + w)!^{17}$?

Resolución:

Como N y 169 son pesí, entonces: $N^{\phi(169)} = \overset{\circ}{169} + 1$
Donde: $\phi(169) = \phi(13^2) = 13 \times (13 - 1) = 156$
Reemplazamos:
$59N^{\phi(169)} = \overset{\circ}{\overline{13^2}} + \overline{zw}_{(13)}$
$59(\overset{\circ}{169} + 1) = \overset{\circ}{169} + \overline{zw}_{(13)}$
$\overset{\circ}{169} + 59 = \overline{zw}_{(13)}$

$\Rightarrow\ \overline{zw}_{(13)} = \left\{\begin{array}{l} 59 \\ 228 \\ \vdots \end{array}\right.$

$\overline{zw}_{(13)} = 59 = 47_{(13)}$

Nos piden la cantidad de ceros en que termina $(11!)^{17}$.
Entonces hallamos los exponentes de 2 y 5 en $(11!)^{17}$.
$$(11!)^{17} = (2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times ...)^{17}$$

$$\begin{array}{l} 11 \,|\, \underline{2} \\ \quad 5 \,|\, \underline{2} \\ \qquad 2 \,|\, \underline{2} \\ \qquad\quad 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 11 \,|\, \underline{5} \\ \quad\ \ 2 \end{array}$$

$\alpha = 5 + 2 + 1 = 8$ $\qquad\qquad$ $\beta = 2$

Luego:

$(11!)^{17} = (2^8 \times 3^\beta \times 5^2 ...)^{17} = 2^{136} \times 3^{17\beta} \times 5^{34} \times ...$

$\quad = 2^{34} \times 5^{34} \times (2^{102} \times 3^{17\beta} \times ...)$

$\therefore (11!)^{17}$ termina en 34 ceros.

6 Calcula el MCD de A y B, si:
MCD(24A; 64B) = 720; MCD(64A; 24B) = 480

Resolución:

Hallamos el MCD de los 4 números:

MCD((24A; 64A); (24B; 64B)) = MCD(720; 480)

MCD(8A; 8B) = 240

8MCD(A; B) = 240

$\therefore$ MCD(A; B) = 30

7 Halla el número N sabiendo que tiene 10 divisores y además MCD(N; 2205) = 245.

Resolución:

Por dato:

$$CD(N) = 10 \begin{cases} (1 + 1) \times (4 + 1) \\ (9 + 1) \end{cases}$$

También:

$MCD(N; 2205) = 245 \Rightarrow \overset{\circ}{245} = N$

$5 \times 7^2 \times p = N;\ p \in \mathbb{Z}$

Entonces la descomposición conónica tiene la forma:
$N = A^1 \times B^4$

Luego: $N = 5 \times 7^4 = 12\,005$

8 Si MCD(A; B) = 72N y MCD(B; C) = 60N; halla N, si MCD(A; B; C) = 84.

Resolución:

Por propiedad:

MCD(A; B; C) = 84

MCD(A; B; B; C) = 84

MCD[MCD(A; B); MCD(B; C)] = 84

MCD(72N; 60N) = 84

$N \times \underbrace{MCD(72; 60)}_{12} = 84$

$\Rightarrow 12N = 84$

$\quad N = 7$

9 Halla a^2; sabiendo que:
$MCM(\overline{ab}; \overline{(a + 1)(b + 1)}) = 132$

Resolución:

Como $MCM(\overline{ab}, \overline{(a + 1)(b + 1)}) = 132$; entonces:

$\overline{ab} \times p = 132 \wedge \overline{(a + 1)(b + 1)} \times q = 132$

$(\overline{ab} + 11) \times q = 132$ (p y q PESÍ)

$\overline{ab} \times q = 11(12 - q)$

Se tiene:

$$\div \begin{cases} \overline{ab} \times p = 132 \\ \overline{ab} \times q = 11(12 - q) \end{cases}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{12}{12 - q} \Rightarrow \frac{pq}{p - q} = 12$$

Como p y q son PESÍ, entonces p y p − q son PESÍ y, q y p − q son PESÍ. Luego, pq y p − q son coprimos.

Por lo tanto: $p - q = 1$ y $pq = 12$

$\Rightarrow p = 4 \wedge q = 3$

Se tiene: $\overline{ab} = \dfrac{132}{4} = 33$

Nos piden: $a^2 = 3^2 = 9$

10 María, Kelly y Carol visitan a Paola cada 12; 9 y 8 días, respectivamente. Si la última vez que coincidieron fue el 15 de julio, ¿cuándo volverán a coincidir?

Resolución:

La próxima fecha en la que las 3 amigas visitarán nuevamente a Paola será dentro de N días, siendo N el mínimo común múltiplo de 12; 9 y 8:

N = MCM(12; 9; 8) = 72

$\therefore$ 15 julio + 72 días = 25 de setiembre

11 Si el MCD(A; B; C) = 6^n y tiene 8 divisores propios, además: $A^2 = B^2 + C^2$ (A < 200) calcula el MCM(7A; 12B; 12C) y da como respuesta la cantidad de sus divisores.

Resolución:

Por dato: MCD(A; B; C) = 6^n, y tiene 8 divisores propios.

Sea: $M = MCD(A; B; C) = 2^n . 3^n$

$\Rightarrow CD(M) = (n + 1)(n + 1) = 8 + 1 \Rightarrow n = 2$

$\Rightarrow$ MCD(A; B; C) = 36

Entonces: $A = 36p_A$; $B = 36p_B$; $C = 36p_C$

Donde: p_A, p_B y p_C son PESÍ.

Además:

$A^2 = B^2 + C^2$; $(A < 200) \Rightarrow 36p_A < 200$

$36^2 p_A^2 = 36^2 p_B^2 + 36^2 p_C^2 \qquad p_A < 5,5$

$$\begin{array}{ccccc} p_A^2 & = & p_B^2 & + & p_C^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & & 4 & & 3 \end{array}$$

$A = 5 . 36 = 180 \Rightarrow 7A = 7 . 5 . 3^2 . 2^2$

$B = 4 . 36 = 144 \Rightarrow 12B = 2^6 . 3^3$

$C = 3 . 36 = 108 \Rightarrow 12C = 2^4 . 3^4$

$N = MCM(7A; 12B; 12C) = 2^6 . 3^4 . 5 . 7$

$\therefore CD(N) = 7 . 5 . 2 . 2 = 140$

FRACCIONES

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales está determinado por: $\mathbb{Q} = \{x \,/\, x = \frac{a}{b};\ \forall\ a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$

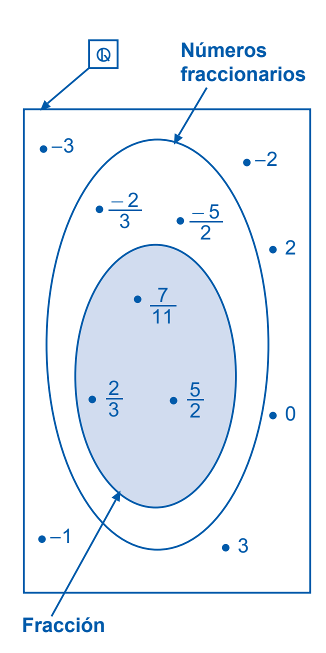
Como ejemplos tenemos: $\frac{7}{5};\ \frac{11}{-13};\ \frac{-2}{3};\ \frac{6}{2}$; etc.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son aquellos números racionales que no son enteros. Veamos algunos ejemplos:

$\frac{5}{8};\ \frac{3}{4};\ \frac{7}{-11};\ \frac{-2}{13}$ } Son números fraccionarios

$\frac{18}{6};\ \frac{-12}{3};\ \frac{8}{-2};\ \frac{21}{7}$ } No son números fraccionarios



FRACCIÓN

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son números enteros positivos. Veamos algunos ejemplos:

$\frac{3}{5};\ \frac{7}{4};\ \frac{2}{11};\ \frac{9}{13}$ } Son fracciones

$\frac{-5}{-7};\ \frac{-4}{11};\ \frac{13}{-2};\ \frac{-6}{17}$ } No son fracciones

Si F es fracción: $F = \frac{A}{B}$ ← Numerador, ← Denominador

Donde:
$A; B \in \mathbb{Z}^+ \wedge A \neq \overset{\circ}{B}$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

Sea la fracción: $\frac{A}{B}$

1. Por la comparación de su valor respecto a la unidad

Propia	Impropia
$\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow A < B$	$\frac{A}{B} > 1 \Rightarrow A > B$
$\frac{4}{13};\ \frac{2}{7};\ \frac{9}{11};\ \frac{5}{8}$	$\frac{21}{4};\ \frac{7}{3};\ \frac{5}{2};\ \frac{11}{8}$

2. Por su denominador

Decimal	Ordinaria
$B = 10^k,\ k \in \mathbb{Z}^+$	$B \neq 10^k,\ k \in \mathbb{Z}^+$
$\frac{1}{10};\ \frac{3}{10^2};\ \frac{11}{10^3};\ \frac{19}{10^4}$	$\frac{2}{3};\ \frac{7}{11};\ \frac{9}{13};\ \frac{8}{23}$

3. Por la cantidad de divisores comunes de sus términos

Irreductible	Reductible
A y B son PESÍ	A y B no son PESÍ
$\frac{3}{5};\ \frac{11}{19};\ \frac{7}{8};\ \frac{23}{35}$	$\frac{15}{12};\ \frac{22}{46};\ \frac{3}{18};\ \frac{6}{33}$

Recuerda

Una fracción impropia también se puede expresar de otro modo, es decir, como fracción mixta.

Ejemplos:

$\frac{18}{7} = \underbrace{2\frac{4}{7}}_{} = 2 + \frac{4}{7}$ porque 18 ⌊7 → 4, 2

Fracción mixta

$\frac{26}{7} = \underbrace{3\frac{5}{7}}_{} = 3 + \frac{5}{7}$ porque 26 ⌊7 → 5, 3

Fracción mixta

4. Por grupo de fracciones

Homogénea	Heterogénea
Todas las fracciones tienen el mismo denominador.	Al menos un denominador es distinto a los demás.
$\frac{5}{17}; \frac{11}{17}; \frac{7}{17}; \frac{24}{17}$	$\frac{3}{16}; \frac{9}{16}; \frac{1}{16}; \frac{5}{11}$

Nota

Toma en cuenta lo siguiente, para leer correctamente una fracción:

- Si en el denominador de una fracción aparecen los números: 2; 3; 4; ...; 9, se leerá la cantidad del numerador y a continuación la palabra: medios; tercios; cuartos; ...; novenos, respectivamente.

  Ejemplos:

  $\frac{3}{4}$ → tres cuartos

  $\frac{7}{9}$ → siete novenos

- Si en el denominador de la fracción aparecen los números: 10; 100; 1000; ...; se leerá la cantidad del numerador seguido de la palabra: décimo; centésimo; milésimo; ...; respectivamente.

  Ejemplos:

  $\frac{7}{10}$ → siete décimos

  $\frac{11}{100}$ → once centésimos

- Si en el denominador de la fracción aparecen los números diferentes de la potencia y mayores que 10, se leerá la cantidad del numerador seguido de la cantidad del denominador terminado en la palabra avos.

  Ejemplos:

  $\frac{11}{18}$ → Once dieciochoavos.

  $\frac{15}{23}$ → Quince veintitrésavos.

OPERACIONES CON FRACCIONES

1. Adición y sustracción

Veamos algunos ejemplos:

- $\frac{4}{11} + \frac{9}{11} - \frac{3}{11} = \frac{4+9-3}{11} = \frac{10}{11}$
- $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{7}}_{} = \frac{1.21 + 2.14 - 3.6}{42} = \frac{31}{42}$

  MCM(2; 3; 7) = 42

2. Multiplicación

- $\frac{12}{5} \times 10 = \frac{12}{5} \times \frac{10}{1} = \frac{12 \times 10}{5 \times 1} = 24$
- $\frac{15}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{15 \times 4}{8 \times 5} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$

3. División

- $\frac{12}{35} \div 8 = \frac{12}{35} \div \frac{8}{1} = \frac{12}{35} \times \frac{1}{8} = \frac{12}{280} = \frac{3}{70}$
- $\frac{27}{38} \div \frac{9}{19} = \frac{27}{38} \times \frac{19}{9} = \frac{27 \times 19}{38 \times 9} = \frac{3}{2}$

COMPARACIONES DE FRACCIONES

1. **Dado un grupo de fracciones homogéneas, será mayor aquella que tenga mayor numerador.**

   Ejemplo:
   Sean las fracciones:

   $\frac{7}{13}; \frac{2}{13}; \frac{12}{13}; \frac{9}{13} \Rightarrow$ ordenando de menor a mayor: $\frac{2}{13}; \frac{7}{13}; \frac{9}{13}; \frac{12}{13}$

2. **Si se tiene un grupo de fracciones de igual numerador, es mayor la fracción que tiene menor denominador.**

   Veamos un ejemplo:

   $\frac{8}{3}; \frac{8}{11}; \frac{8}{29}; \frac{8}{7} \Rightarrow$ ordenando de menor a mayor: $\frac{8}{29}; \frac{8}{11}; \frac{8}{7}; \frac{8}{3}$

3. **Para dos fracciones realizaremos el producto en aspa, es mayor la fracción que posee el mayor producto.**

   Veamos un ejemplo:

   - Dado las fracciones: $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{5}$

   $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} \Rightarrow \underbrace{3 \times 5}_{15} < \underbrace{7 \times 4}_{28} \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{4}{5}$

Propiedades

1. Dadas las fracciones irreductibles: $f_1 = \frac{a}{b}$ y $f_2 = \frac{c}{d}$

   Si se cumple que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = e \wedge e \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = d$

Veamos un ejemplo:

- $\frac{3}{7}+\frac{11}{m}=n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ Por propiedad $\Rightarrow m=7 \wedge n=2$

2. Sean las fracciones irreductibles: $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, se cumple:

$$\text{MCD}\left[\frac{a}{b};\ \frac{c}{d};\ \frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCD}(a;c;e)}{\text{MCM}(b;d;f)}$$

$$\text{MCM}\left[\frac{a}{b};\ \frac{c}{d};\ \frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCM}(a;c;e)}{\text{MCD}(b;d;f)}$$

Veamos algunos ejemplos:

- $\text{MCD}\left[\frac{2}{3};\ \frac{5}{7};\ \frac{4}{5}\right]=\frac{\text{MCD}(2;5;4)}{\text{MCM}(3;7;5)}=\frac{1}{105}$
- $\text{MCM}\left[\frac{7}{15};\ \frac{8}{9};\ \frac{11}{12}\right]=\frac{\text{MCM}(7;8;11)}{\text{MCD}(15;9;12)}=\frac{616}{3}$

NÚMEROS DECIMALES

Es la representación lineal de las fracciones en base 10. Por ejemplo:

- $\frac{1}{4}=0{,}25$
- $\frac{1}{3}=0{,}333...$
- $\frac{3}{4}=0{,}75$
- $\frac{1}{6}=0{,}166...$

Clasificación de los números decimales

Número decimal
- Número decimal exacto
- Número decimal inexacto
  - Periódico puro
  - Periódico mixto

A) Número decimal exacto

Una fracción irreductible genera un número decimal exacto, cuando el denominador tenga como únicos divisores primos al 2 y/o al 5.
Veamos algunos ejemplos:

- $\frac{2}{25}=\frac{2}{5^{2}}=0{,}\underbrace{08}$ → 2 cifras
- $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^{3}}=0{,}\underbrace{375}$ → 3 cifras
- $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^{4}\times 5}=0{,}\underbrace{0875}$ → 4 cifras
- $\frac{9}{2500}=\frac{9}{2^{2}\times 5^{4}}=0{,}\underbrace{0036}$ → 4 cifras

Fracción generatriz
Ejemplos:

- $0{,}15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$
- $0{,}205=\frac{205}{1000}=\frac{41}{200}$

En general en base decimal:

$$0,\underbrace{\overline{abc\ldots x}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{1000\ldots 00}_{k\text{ ceros}}}$$

En general en base n:

$$0,\underbrace{\overline{abc\ldots x}_{(n)}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc\ldots x}_{(n)}}{\underbrace{1000\ldots 00}_{k\text{ ceros}}{}_{(n)}}$$

B. Número decimal inexacto

1. **Periódico puro.** Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico puro, cuando su denominador no tenga divisores primos a 2 ni a 5.
Veamos algunos ejemplos:

- $\frac{1}{3}=0{,}333...=0{,}\widehat{3}$
- $\frac{5}{53}=0{,}1515...=0{,}\widehat{15}$
- $\frac{8}{27}=0{,}296296...=0{,}\widehat{296}$
- $\frac{5}{37}=0{,}135135...=0{,}\widehat{135}$

Atención

Para comparar fracciones heterogéneas con distintos numeradores, se comparará las fracciones de 2 en 2.

Veamos un ejemplo:
Sean las fracciones:

$\frac{3}{5}$; $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{7}$

- $\frac{3}{5}<\frac{3}{2}$ porque $3 \cdot 2 < 5 \cdot 3$
- $\frac{3}{5}<\frac{5}{7}$ porque $3 \cdot 7 < 5 \cdot 5$
- $\frac{3}{2}>\frac{5}{7}$ porque $3 \cdot 7 > 2 \cdot 5$

Luego, ordenando de manera creciente, tenemos:

$\frac{3}{5}<\frac{5}{7}<\frac{3}{2}$

Observación

Primera regla
En los ejemplos se observa que la cantidad de cifras decimales que tiene un número decimal exacto está dada por el mayor exponente de los factores 2 y/o 5.
¿Te das cuenta?

Fracción generatriz

Ejemplos:

- $0,\widehat{24} = \dfrac{24}{99} = \dfrac{8}{33}$
- $0,\widehat{13} = \dfrac{13}{99}$

En general en base decimal:

$$0,\underbrace{\widehat{abc...x}}_{k \text{ cifras}} = \dfrac{\overline{abc...x}}{\underbrace{999...9}_{k \text{ cifras}}}$$

En general en base n:

$$0,\underbrace{\widehat{abc...x}}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)} = \dfrac{\overline{abc...x}_{(n)}}{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)}}$$

2. Periódico mixto. Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico mixto, cuando el denominador tiene como divisores primos al 2 y/o al 5 y además a otros factores primos.

Ejemplos:

- $\dfrac{13}{44} = \dfrac{13}{2^2 \times 11} = 0,29\widehat{54}$
- $\dfrac{281}{495} = \dfrac{562}{3^2 \times 5 \times 11} = 0,5\widehat{67}$
- $\dfrac{3}{22} = \dfrac{3}{2 \times 11} = 0,1\widehat{36}$
- $\dfrac{62411}{99900} = \dfrac{62411}{3^3 \times 2^2 \times 5^2 \times 37} = 0,62\widehat{473}$

Fracción generatriz

Ejemplos:

- $0,2\widehat{45} = \dfrac{245 - 2}{990} = \dfrac{243}{990}$

  $0,2\widehat{45} = \dfrac{27}{110}$
- $0,74\widehat{2} = \dfrac{742 - 74}{900} = \dfrac{668}{900}$

  $0,74\widehat{2} = \dfrac{167}{225}$

En general en base decimal:

$$0,\underbrace{\overline{abc...h}}_{k \text{ cifras}}\underbrace{\widehat{pqr...x}}_{m \text{ cifras}} = \dfrac{\overline{abc...hpqr...x} - \overline{abc...h}}{\underbrace{999...99}_{m \text{ cifras}}\underbrace{00...00}_{k \text{ cifras}}}$$

En general en base n:

$$0,\underbrace{\overline{abc...h}}_{k \text{ cifras}}\underbrace{\widehat{pqr...x}}_{m \text{ cifras}}{}_{(n)} = \dfrac{\overline{abc...hpqr...x}_{(n)} - \overline{abc...h}_{(n)}}{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}}_{m \text{ cifras}}\underbrace{00...00}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)}}$$

NÚMEROS AVALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción en un determinado sistema de numeración. Por ejemplo:

- $\dfrac{23}{9} = \dfrac{212_{(3)}}{100_{(3)}} = 2,12_{(3)}$
- $\dfrac{46}{15} = \dfrac{232_{(4)}}{33_{(4)}} = 2,\widehat{32}_{(4)}$

Todo número aval presenta dos partes:

$$\overline{\underbrace{abc...k}_{\text{Parte entera}},\underbrace{mnp...z}_{\text{Parte aval}}}_{(\alpha)}$$

Coma ...aval

Nota. El orden de los números avales se expresará.

Sea el numeral: $572,1524_{(8)}$

$$572,1524_{(8)} = 5 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{5}{8^2} + \dfrac{2}{8^3} + \dfrac{4}{8^4}$$

Orden ⇒ 2 1 0 –1 –2 –3 –4

Observación

Segunda regla

La cantidad de cifras del periodo de un número periódico puro está dada por la cantidad de cifras del menor número formado por cifras 9, que contienen como factor al denominador de la fracción generatriz.

- $\dfrac{1}{3} = 0,\widehat{3}$ → 3 es factor de 9. (1 cifra)
- $\dfrac{8}{27} = 0,\widehat{296}$ → 27 es factor de 999. (3 cifras)

¿Te das cuenta?

Nota

Recuerda la siguiente tabla:

$9 = 3^2$

$99 = 3^2 \times 11$

$999 = 3^3 \times 37$

$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$

$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$

$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

Observación

Tercera regla

La cantidad de cifras no periódicas del decimal periódico mixto está dada por la primera regla y la cantidad de cifras periódicas por la segunda regla.

Veamos un ejemplo:

$\dfrac{79}{140} = 0,56\widehat{428571}$

$2^2 \times 5 \times 7$ — 2 cifras — 6 cifras

$2^2 \times 5$ → genera 2 cifras no periódicas.

7 es factor de 999999, genera 6 cifras periódicas.

Problemas resueltos

A

1 Después de haber perdido sucesivamente los 3/8 de su hacienda, 1/9 del resto y 5/12 del nuevo resto, una persona hereda S/.45 600 y de esta manera, la pérdida se reduce a la mitad de la cantidad inicial. ¿Cuánto era su fortuna inicial?

Resolución:

Sea T la cantidad inicial, entonces:

$$\frac{7}{12}\left[\frac{8}{9}\left(\frac{5T}{8}\right)\right]+45\,600=\frac{T}{2}$$

$$\frac{35T}{108}+45\,600=\frac{T}{2}$$

$$T=259\,200$$

Luego, la fortuna inicial era S/.259 200.

2 Halla una fracción equivalente a 7/12 sabiendo que si al término menor le sumamos 70 para que el valor de la fracción no se altere, entonces el otro término debe triplicarse.

Resolución:

Sea la fracción: $f=\frac{a}{b}=\frac{7n}{12n}$

Del enunciado:

$$\frac{(7n+70)}{3\times 12n}=\frac{7}{12}$$

$$12(7n+70)=7\times 3\times 12n$$

$$7(n+10)=7\times 3\times n$$

$$n+10=3n\Rightarrow n=5$$

Entonces: $f=\frac{7n}{12n}=\frac{7(5)}{12(5)}=\frac{35}{60}$

3 ¿Cuántas fracciones cuyos términos son enteros consecutivos son menores que 51/67?

Resolución:

Sea la fracción: $f=\frac{n}{n+1}$

Por condición del problema:

$$\frac{n}{n+1}<\frac{51}{67}$$

$$67n<51n+51$$

$$16n<51$$

$$n<3{,}1875$$

$n=\{1;2;3\}$

$\therefore$ Existen 3 fracciones.

4 Halla el valor de a, si:

$$\frac{\overline{2a}}{55}=0,\overline{a3636...}$$

Resolución:

$$\frac{\overline{2a}}{55}=0,\overline{a3636...}$$

$$\frac{\overline{2a}}{55}=\frac{\overline{a36}-a}{990}$$

Luego: $18(20+a)=99a+36$

$$360+18a=99a+36$$

$$324=81a$$

$$\Rightarrow a=4$$

Entonces, el valor de a es 4.

5 Calcula el valor de a + b + c, si:

$$\sqrt{0,00\widehat{a}+0,00\widehat{b}+0,00\widehat{c}}=0,1\widehat{6}$$

Resolución:

$$\sqrt{\frac{a}{900}+\frac{b}{900}+\frac{c}{900}}=\frac{16-1}{90}$$

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{900}}=\frac{15}{90}$$

$$\frac{\sqrt{a+b+c}}{30}=\frac{1}{6}$$

$$\sqrt{a+b+c}=5$$

$\therefore\ a+b+c=25$

6 Si $0,\widehat{ab}_{(5)}=0,\widehat{cb}_{(7)}$, calcula la suma de los valores de (a + b + c).

Resolución:

$$0,\widehat{ab}_{(5)}=\frac{\overline{ab}_{(5)}}{44_{(5)}}=\frac{5a+b}{24}$$

$$0,\widehat{cb}_{(7)}=\frac{\overline{cb}_{(7)}}{66_{(7)}}=\frac{7c+b}{48}$$

$$\frac{5a+b}{24}=\frac{7c+b}{48}$$

$$10a+2b=7c+b$$

$$10a+b=7c$$

a	b	c	
1	4	2	$\Rightarrow a+b+c=7$
2	1	3	$\Rightarrow a+b+c=6$
4	2	6	$\Rightarrow a+b+c=12$

$\therefore$ Suma de valores de $(a+b+c)=7+6+12=25$

7 Si la fracción generatriz $1/\overline{ab}$ genera el número decimal $0,\widehat{0(a-1)b}$. Calcula el valor de (a + b).

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{1}{\overline{ab}}=0,\widehat{0(a-1)b}=\frac{\overline{(a-1)b}}{999}$$

$$999=\overline{(a-1)b}\times\overline{ab}$$

$$37\times 27=\overline{(a-1)b}\times\overline{ab}$$

$\overline{ab}=37\ \wedge\ \overline{(a-1)b}=27$

$\Rightarrow a=3\ \wedge\ b=7;$ piden: $a+b=3+7=10$

8 ¿Cuántas cifras tiene la parte no periódica de la fracción $f=\frac{800}{31!-21!}$?

Resolución:

Como: $800=2^5\times5^2$

$31!-21!=21!\,(22\times23\ ...\times31-1)$

$31!-21!=2^{18}\times5^4\underbrace{(22\times23\ ...\times31-1)}_{A}$

En la fracción tenemos:

$$f=\frac{2^5\times5^2}{2^{18}\times5^4\times A}$$

$$f=\frac{1}{2^{13}\times5^2\times A}$$

El número de cifras de la parte no periódica es el mayor exponente de 2 ó 5. En este caso es 13.

9 Halla: $a+b+c+d$, sabiendo que:

$\frac{a}{4}+\frac{b}{4^2}+\frac{c}{4^3}+\frac{d}{4^4}=\frac{127}{256}$, además, $a, b, c, d\in\{1; 2; 3\}$

Resolución:

$\frac{a}{4}+\frac{b}{4^2}+\frac{c}{4^3}+\frac{d}{4^4}=\frac{127}{256}$ (Puede ser expresado como número tetraval)

$$0,\overline{abcd}_{(4)}=\frac{1333_{(4)}}{10000_{(4)}}=0,1333_{(4)}$$

$\Rightarrow a=1;\ b=3;\ c=3;\ d=3$

$\therefore\ a+b+c+d=10$

10 Si: $\frac{N}{125}=0,\overline{(m+1)(m+2)(m+3)}$

Calcula: $N-m$

Resolución:

Del problema:

$$\frac{N}{125}=\frac{\overline{(m+1)(m+2)(m+3)}}{1000}$$

$$\Rightarrow N=\frac{\overline{(m+1)(m+2)(m+3)}}{8}\in\mathbb{Z}$$

Luego:

$(m+1)(m+2)(m+3)=\overset{\circ}{8}$, con $(m+1)$ impar:

$1\rightarrow\ 234\neq\overset{\circ}{8}$ (no cumple)

$3\rightarrow\ 456=\overset{\circ}{8}$

$5\rightarrow\ 678\neq\overset{\circ}{8}$ (no cumple)

$\Rightarrow\ m=3$

Además: $N=\frac{456}{8}\Rightarrow N=57$

$\therefore\ N-m=54$

11 Simplifica la expresión E:

$$E=\frac{(0,5+0,\overset{\frown}{6}-0,0\overset{\frown}{5})\times0,9}{3,\overset{\frown}{1}-2,0\overset{\frown}{6}}$$

Resolución:

Desarrollamos las fracciones y tenemos:

$$E=\frac{\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{9}-\frac{5}{90}\right)\times\frac{9}{10}}{3+\frac{1}{9}-\left(2+\frac{6}{90}\right)}=\frac{1}{1+\frac{4}{90}}$$

Simplificando queda:

$$E=\frac{90}{94}=\frac{45}{47}$$

12 Ordena en forma creciente las siguientes expresiones:

$\frac{53}{125};\ 3\sqrt{0,0196};\ 0,425$

Resolución:

Igualamos los denominadores y ordenamos de acuerdo a los numeradores:

$$\frac{53}{125};\ 3\sqrt{\frac{196}{10000}};\ \frac{425}{1000}$$

$$\frac{53}{125};\ 3\times\frac{14}{100};\ \frac{425}{1000}$$

MCM(125; 100; 1000) = 1000; luego:

$$\frac{53\times8}{1000};\ \frac{3\times140}{1000};\ \frac{425}{1000}$$

$$\frac{424}{1000};\ \frac{420}{1000};\ \frac{425}{1000}$$

Entonces, el orden será:

$$3\sqrt{0,0196};\ \frac{53}{125};\ \frac{425}{1000}$$

13 Simplifica la siguiente expresión:

$$E=\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}+\frac{1}{4\frac{1}{2}}}$$

Resolución:

Operamos las fracciones mixtas:

$$E=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}+\frac{2}{9}}$$

$$E=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{9\times7+2\times2}{18}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{67}{18}}=\frac{5\times18}{2\times67}$$

$$\therefore\ E=\frac{45}{67}$$

RAZONES Y PROPORCIONES

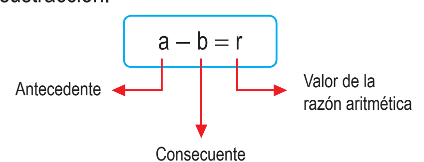
A

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades mediante una operación aritmética (sustracción o división).

Razón aritmética

Es la comparación de dos cantidades a y b, mediante la sustracción.



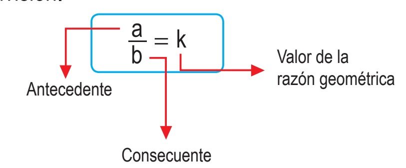
Veamos un ejemplo:
Si Manuel tiene 20 años y María 9 años, comparando las edades.

$$20 - 9 = 11$$

Interpretación:
Manuel es mayor que María en 11 años.

Razón geométrica

Es la comparación de dos cantidades a y b, mediante la división.



Veamos un ejemplo:
Si Pedro tiene 15 chocolates y Miguel 5 chocolates, comparando cantidades.

$$\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$$

Interpretación:
La cantidad de chocolates de Pedro y la de Miguel están en la relación de 3 a 1.

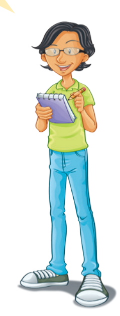
Observación

A tiene 12 años y B tiene 8 años.
La interpretación de la razón aritmética es:
- A es mayor que B en 4 años.
- A tiene 4 años más que B.
- La razón aritmética de las edades de A y B tiene por valor 4.

$$12 - 8 = 4$$

La interpretación de la razón geométrica es:
- La edad de A y la de B son entre sí como 3 es a 2.
- La edad de A y la de B están en la relación de 3 a 2.
- La razón entre las edades de A y B es de 3 a 2.

$$\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$



SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Se llama así al conjunto de razones geométricas que tienen el mismo valor de la razón.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Donde:
$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$: antecedentes
$b_1; b_2; b_3; ...; b_n$: consecuentes
k: constante de proporcionalidad

Propiedades

1. $a_1 = b_1k;\ a_2 = b_2k;\ ...;\ a_n = b_nk$

2. $\dfrac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}} = k$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n} = k$$

3. $\dfrac{\text{producto de antecedentes}}{\text{producto de consecuentes}} = k^n$

$$\frac{a_1 . a_2 . a_3 ... a_n}{b_1 . b_2 . b_3 ... b_n} = k^n$$

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS CONTINUAS EQUIVALENTES

Es aquella sucesión de varias razones geométricas equivalentes, donde el primer consecuente es igual al segundo antecedente, el segundo consecuente es igual al tercer antecedente y así sucesivamente.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = ... = \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$$

Atención

A la razón geométrica se le llama simplemente razón o relación.

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones del mismo tipo (aritmética o geométrica).

Proporción aritmética

Es la igualdad de dos razones aritméticas.

$$a - b = c - d$$

Donde:
a; d: términos extremos
b; c: términos medios

Veamos unos ejemplos:

1. Si 40 excede a 20 tanto como 35 excede a 15, se escribe:

$$40 - 20 = 35 - 15$$

2. Si a es mayor que 30 en la misma diferencia que 90 lo es de 2a, halla a.

$$a - 30 = 90 - 2a$$
$$a = 40$$

Propiedad
En toda proporción aritmética, la suma de términos extremos es igual a la suma de los términos medios.

$$a + d = b + c$$

Recuerda

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se lee: "a es a b como c es a d".

Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Donde:
a; d: términos extremos
b; c: términos medios

Veamos unos ejemplos:

1. Si 12 es a 3 como 20 es a 5, se escribe:

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{5}$$

2. La relación de los valores de a y b es de 3 a 5, se expresa:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

Propiedad
En toda proporción geométrica, el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

$$a \times d = b \times c$$

CLASIFICACIÓN DE LAS PROPORCIONES SEGÚN SUS TÉRMINOS

	Proporción aritmética	Proporción geométrica
Discreta Posee términos medios diferentes.	$a - b = c - d$ d: cuarta diferencial de a; b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ d: cuarta proporcional de a; b y c.
Continua Posee términos medios iguales.	$a - b = b - c$ b: media diferencial de a y c. c: tercera diferencial de a y b.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ b: media proporcional de a y c. c: tercera proporcional de a y b.

Atención

La media, tercera y cuarta diferencial son términos de una proporción aritmética; en cambio la media, tercera y cuarta proporcional son términos de una proporción geométrica.

Veamos algunos ejemplos:

- ¿Cuál es la media diferencial de 24 y 10?
  $\Rightarrow 24 - x = x - 10$
  $x = 17$
- ¿Cuál es la media proporcional de 3 y 48?
  $\frac{3}{x} = \frac{x}{48} \Rightarrow x^2 = 144$
  $x = 12$
- ¿Cuál es la cuarta proporcional de 2; 3 y 14?
  $\frac{2}{3} = \frac{14}{x} \quad \Rightarrow x = 21$

Propiedades de una proporción geométrica

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

Algunas propiedades son:

1. $\frac{a + c}{b + d} = \frac{a - c}{b - d} = k$

2. $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d} = k + 1$

3. $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d} = \frac{k + 1}{k - 1}$

Problemas resueltos

1 La razón geométrica de dos cantidades es 18/15 y la razón aritmética es 35. Calcula dichas cantidades.

Resolución:

Sean los números a y b.

$$\frac{a}{b} = \frac{18}{15} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{5} \left. \right\} \begin{array}{l} a = 6k \\ b = 5k \end{array}$$

Además: $a - b = 35$

$6k - 5k = 35$

$k = 35$

$\Rightarrow a = 6k = 6(35) = 210$

$b = 5k = 5(35) = 175$

2 La cuarta proporcional de 4; 7 y 12 es un número entero; determina la suma de cifras de dicho número.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{4}{7} = \frac{12}{x}$

$4x = 12 \times 7$

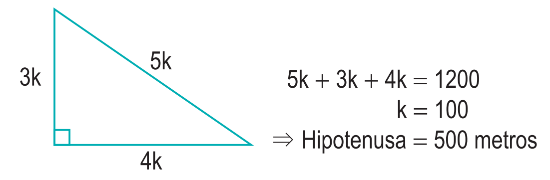
$4x = 84$

$x = 21$

Piden: $2 + 1 = 3$

3 El perímetro de un triángulo rectángulo mide 1200 metros. Si la relación de catetos es 3/4, halla la medida de la hipotenusa.

Resolución:



$5k + 3k + 4k = 1200$

$k = 100$

$\Rightarrow$ Hipotenusa $= 500$ metros

4 Determina la tercera proporcional entre la media proporcional de 9 y 16, y la cuarta proporcional de 10; 15 y 14.

Resolución:

Sea x la media proporcional de 9 y 16.

Donde: $\frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \sqrt{9 \times 16} = 12$

Sea y la cuarta proporcional de 10; 15 y 14.

Donde: $\frac{10}{15} = \frac{14}{y} \Rightarrow y = \frac{15 \times 14}{10} = 21$

Hallando la tercera proporcional de x e y tenemos:

$\Rightarrow \frac{12}{21} = \frac{21}{N}$

Despejando: $N = 36{,}75$

5 Roxana planta rosas más rápidamente que Carmen en la proporción de 4 a 3. Cuando Carmen planta x rosas en una hora Roxana planta x + 2 rosas. ¿Cuántas rosas planta Carmen en 4 horas?

Resolución:

Dato: $\frac{R}{4} = \frac{C}{3}$

En 1 hora: $\frac{x+2}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 6$

$\therefore$ En 4 horas plantará: $6 \cdot 4 = 24$ rosas

6 Actualmente, las edades de dos personas están en la relación de 8 a 11 y dentro de 10 años en la relación de 7 a 9. Determina en qué relación se encontraban dichas edades hace 4 años.

Resolución:

Edades A y B.

Presente: $\frac{A}{B} = \frac{8}{11} \Rightarrow A = 8k;\ B = 11k$

Dentro de 10 años: $\frac{A+10}{B+10} = \frac{7}{9}$

$9(8k + 10) = 7(11k + 10)$

$72k + 90 = 77k + 70$

$20 = 5k$

$k = 4$

Luego: $A = 32 \wedge B = 44$

Hace 4 años: $\frac{A-4}{B-4} = \frac{32-4}{44-4} = \frac{7}{10}$

7 La suma de los 4 términos de una proporción geométrica continua es 9. Si la diferencia de sus extremos es 3, halla el producto de los 4 términos.

Resolución:

Sea la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

Por dato: $a - d = 3$ ...(1)

$a + 2b + d = 9$

Sabemos: $b = \sqrt{ad}$

Reemplazando tenemos:

$a + 2\sqrt{ad} + d = 9$

$(\sqrt{a} + \sqrt{d})^2 = 9$

$\sqrt{a} + \sqrt{d} = 3$ ...(2)

De (1) y (2): $a = 4,\ d = 1,\ b = 2$

$\therefore\ a \times b \times b \times d = 16$

8 Si: $\frac{ab}{8} = \frac{ac}{15} = \frac{bc}{10} = k$, entonces la suma de los menores valores naturales de a, b, c y k es:

Resolución:

De: $\frac{ab}{8} = \frac{ac}{15} \Rightarrow \frac{b}{8} = \frac{c}{15} = \frac{k}{a}$

$\frac{ab}{8} = \frac{bc}{10} \Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{c}{15} = \frac{2k}{3b}$

$\Rightarrow \frac{a}{12} = \frac{b}{8} = \frac{c}{15} = \frac{k}{a} = \frac{2k}{3b}$

Como a, b y c son naturales y los mínimos posibles, entonces:

$a = 12,\ b = 8,\ c = 15.$

Luego: $\frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12$

$\therefore\quad a + b + c + k = 47$

9 En una fiesta hay 160 personas, además por cada 5 varones hay 3 mujeres y por cada 3 que están bailando 5 no bailan. ¿Cuántos varones no están bailando?

Resolución:

V: 5k
M: 3k
$5k + 3k = 160 \Rightarrow k = 20$
$\Rightarrow V = 100 \ \wedge M = 60$

Si bailan x parejas: $\frac{x + x}{(100 - x) + (60 - x)} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 10x = 480 - 6x \Rightarrow x = 30$

$\therefore$ Varones que no bailan es: $100 - x = 100 - 30 = 70$

10 Los antecedentes de varias razones iguales son 3; 4; 5 y 6; y la suma de los dos primeros consecuentes es 28. ¿Cuál será la suma de los otros dos consecuentes?

Resolución:

Del enunciado: $\frac{3}{a} = \frac{4}{b} = \frac{5}{c} = \frac{6}{d} = k$

Luego: $\frac{3+4}{a+b} = k \Rightarrow k = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

Entonces: $\frac{5+6}{c+d} = k \Rightarrow \frac{11}{c+d} = \frac{1}{4}$

$\therefore\ c + d = 44$

11 El número de vagones que lleva un tren A es los 5/11 del que lleva un tren B y el que lleva un tren C, es los 7/13 de otro tren D. Entre A y B llevan tantos vagones como los otros dos. Si el número de vagones de cada tren no puede pasar de 60, ¿cuál es el número de vagones que lleva el tren C?

Resolución:

Por dato, tenemos:

$\frac{A}{B} = \frac{5}{11} = k \Rightarrow A = 5k,\ B = 11k$

$\frac{C}{D} = \frac{7}{13} = p \Rightarrow C = 7p,\ D = 13p$

Además, A y B tienen el mismo número de vagones que C y D juntos, por tanto:

$16k = 20p$
$4k = 5p \quad \Rightarrow \quad k = 5 \ \wedge\ p = 4$

Finalmente, cada uno tiene:
$A = 25,\ B = 55,\ C = 28,\ D = 52$
$\therefore C = 28$

12 De la serie: $\frac{a}{5^{100}} = \frac{b}{5^{101}} = \frac{c}{5^{102}}$, además $a + b + c = 124$
Calcula a.

Resolución:

De la serie: $\frac{a}{5^{100}} = \frac{b}{5^{101}} = \frac{c}{5^{102}} = k$

$k = \frac{a+b+c}{5^{100} + 5^{101} + 5^{102}} = \frac{124}{5^{100}(1 + 5 + 5^2)}$

$k = \frac{124}{31 . 5^{100}} = \frac{4}{5^{100}}$

$a = 5^{100} . k \Rightarrow a = 4$

13 Si $\frac{m}{13!} = \frac{n}{14!} = \frac{p}{15!} = \frac{q}{16!}$, además $m + n = 17!$
Calcula $q - p$.

Resolución:

$\frac{m}{13!} = \frac{n}{14!} = \frac{p}{15!} = \frac{q}{16!} = k$

$\Rightarrow \frac{m + n}{13! + 14!} = k$

$\frac{17!}{13! + 13!.14} = k$

$\frac{17 . 16 . 15 . 14 . 13!}{13! . 15} = 5$

$\Rightarrow\ k = 14 . 16 . 17$

Luego:
$q - p = k . (15! . 16 - 15!)$
$q - p = k . 15! . 15$
$= 14 . \underbrace{16 . 17 . 15!}_{17!} . 15$
$\therefore\ q - p = 210 \times 17!$

14 Si: $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$, $a + x + c = 28$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{7}{16}$.
Calcula x. ($x \in \mathbb{Z}^+$)

Resolución:

Del problema:
$ac = x^2 \quad ...(1)$
$a + c = 28 - x \quad ...(2)$
Además:
$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{x} = \frac{7}{16}$
$\frac{a + c}{ac} + \frac{1}{x} = \frac{7}{16} \quad ...(3)$

Reemplazando (1) y (2) en (3):
$\frac{28 - x}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{7}{16}$
$\frac{28}{x^2} = \frac{7}{16} \Rightarrow x^2 = 64$

$\therefore\ x = 8$

15 La suma de tres números es 14 250; el primero es al segundo como 11 es a 3 y su diferencia, 600. ¿Cuál es el doble del mayor por el menor?

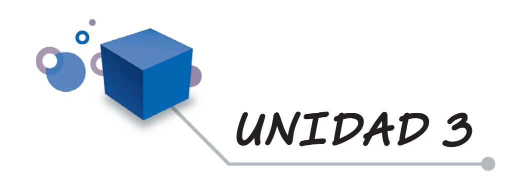
Resolución:

Sean los números:
$a + b + c = 14\,250$
Datos:
$\frac{a}{b} = \frac{11}{3}$ y $a - b = 600$

Restamos 1 a ambas razones de la proporción:
$\frac{a}{b} - 1 = \frac{11}{3} - 1$
$\frac{a - b}{b} = \frac{11 - 3}{3}$

Resolviendo y reemplazando:
$\frac{600}{b} = \frac{8}{3}$
$\Rightarrow b = 225,\ a = 825$ y $c = 13\,200$

Luego el doble del mayor por el menor es:
$2(13\,200)(225) = 5\,940\,000$



MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitud

Se llama magnitud a toda cualidad o característica susceptible de variar (aumentar o disminuir). Por ejemplo: la longitud, la masa, el tiempo, etc.

Cantidad

Es todo caso particular de una magnitud, resultado de la medición de una determinada magnitud.

Debemos tener en cuenta:

MAGNITUD	CANTIDAD
Longitud	5 m
Tiempo	20 min
Temperatura	36 °C
Rapidez	40 km/h

RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes son DP o solamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra también queda multiplicado por dicho número.

Veamos un ejemplo:

×2 ×5 ×7

Costo (S/.)	3	6	15	21
N.° lápices	1	2	5	7

×2 ×5 ×7

Por ello podemos afirmar que:

Costo (DP) n.° lápices

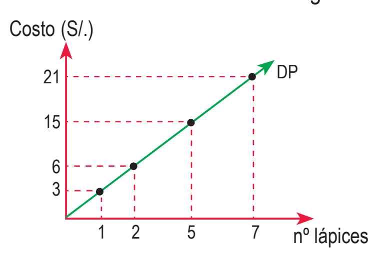
Además, podemos ver:

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{21}{7} = 3 \leftarrow \text{constante}$$

Entonces:

$$\frac{\text{costo}}{\text{n.° lápices}} = \text{constante}$$

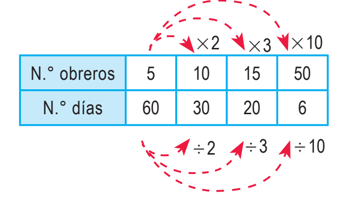
Representando los valores de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares:



Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido por dicho valor.

Veamos un ejemplo:



×2 ×3 ×10

N.° obreros	5	10	15	50
N.° días	60	30	20	6

÷2 ÷3 ÷10

Por ello podemos afirmar que:

n.° obreros (IP) n.° días

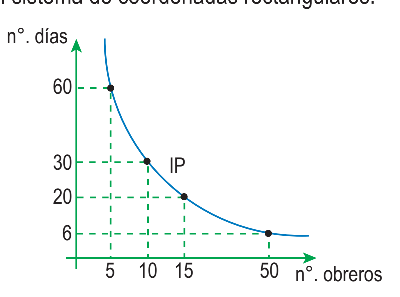
Además, podemos ver:

$$5 \times 60 = 10 \times 30 = 15 \times 20 = 50 \times 6 = 300 \leftarrow \text{constante}$$

Entonces:

(n.° obreros)(n.° días) = constante

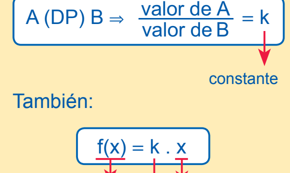
Representando los valores de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares:



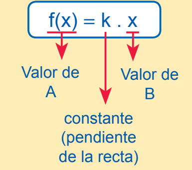
Observaciones

- La gráfica de dos magnitudes DP resultan ser puntos sobre una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.
- En cualquier punto de la gráfica el cociente de cada par de valores resulta una constante.

En general:



También:



Observaciones

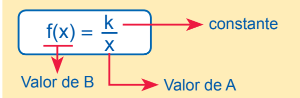
- La gráfica de dos magnitudes IP resultan ser puntos sobre una rama de la hipérbola equilátera.
- En cualquier punto de la gráfica el producto de cada par de valores correspondientes resulta ser una constante.

En general:

A (IP) B

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\text{Valor de}\\ \text{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Valor de}\\ \text{B}\end{pmatrix} = k$ ← constante

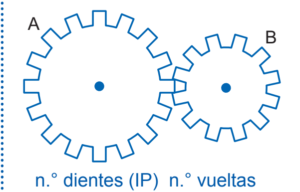
También:



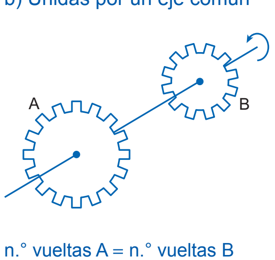
Nota

Cuando se tienen 2 ruedas:

a) Engranadas



b) Unidas por un eje común



n.° vueltas A = n.° vueltas B

Propiedades

1. A (DP) B ⇔ B (DP) A
   A (IP) B ⇔ B (IP) A
2. A (IP) B ⇔ A (DP) $\frac{1}{B}$
   A (DP) B ⇔ A (IP) $\frac{1}{B}$
3. A (DP) B ⇔ A^n (DP) B^n
   A (IP) B ⇔ A^n (IP) B^n
4. $\left.\begin{array}{l}A\ (DP)\ B\\ A\ (IP)\ C\\ A\ (DP)\ D\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{A.C}{B.D} = k$

REPARTO PROPORCIONAL

Procedimiento que consiste en repartir una cantidad en forma DP y/o IP a ciertos valores llamados índices de proporcionalidad.

Veamos algunos ejemplos:

- Reparte S/.492 DP a 2; 3 y 7.
  $\frac{A}{2} = \frac{B}{3} = \frac{C}{7} = k$ (k constante)
  $\Rightarrow$ A = 2k; B = 3k; C = 7k

  Entonces:
  A + B + C = 492
  2k + 3k + 7k = 492
  12k = 492 $\Rightarrow$ k = 41

  Luego, las partes repartidas son:
  A = 82; B = 123 y C = 287

- Reparte S/.492 IP a 2; 3 y 7.
  2 . A = 3 . B = 7 . C
  (dividiendo entre 2 × 3 × 7)
  $\frac{A}{21} = \frac{B}{14} = \frac{C}{6} = k$
  $\Rightarrow$ A = 21k; B = 14k ∧ C = 6k

  Entonces: A + B + C = 492
  41k = 492 $\Rightarrow$ k = 12

  Luego, las partes repartidas son:
  A = 252; B = 168 y C = 72

REGLA DE COMPAÑÍA

La regla de compañía es un caso especial de reparto proporcional. Consiste en repartir las utilidades o las pérdidas de una sociedad (varios socios) en forma proporcional al capital y al tiempo que han permanecido los socios en el negocio.
Sean las magnitudes capital, ganancia y tiempo, entonces:
Ganancia DP capital (tiempo constante)
Ganancia DP tiempo (capital constante)

Luego: $\frac{\text{ganancia}}{\text{capital . tiempo}} = k$ ← constante

Ejemplo:
Jimmy y Mario emprenden un negocio, el primero aporta S/.10 000 y el segundo S/.12 000. Si han permanecido en el negocio 8 y 5 meses, respectivamente y, si al terminar el negocio quedó una utilidad de S/.8400, ¿cuánto es la ganancia de cada socio?¿Cuál es el monto con el que se retiran?

Resolución:

	Capital	Tiempo	Ganancia
Jimmy	10 000	8	G_1
Mario	12 000	5	G_2

Se sabe que: $\frac{\text{ganancia}}{\text{(capital)(tiempo)}} = k$

Reemplazando: $\frac{G_1}{10\,000 \times 8} = \frac{G_2}{12\,000 \times 5} = k$

Simplificando: $\frac{G_1}{4} = \frac{G_2}{3} = k$

Entonces: $G_1 = 4k \wedge G_2 = 3k$

Luego sabemos que: 7k = 8400 $\Rightarrow$ k = 1200

- La ganancia de cada socio es:
  Jimmy: 4k = 4(1200) = S/.4800
  Mario: 3k = 3(1200) = S/.3600
- El monto con el que se retira cada socio es:
  Jimmy: 10 000 + 4800 = S/.14 800
  Mario: 12 000 + 3600 = S/.15 600

Problemas resueltos

A

1 El precio de los diamantes varía proporcionalmente con el cuadrado de su peso. Si un diamante se compró en S/.3200 partiéndose en 2 partes que son entre sí como 3 es a 5, ¿cuál sería la pérdida al partirse el diamante?

Resolución:

Sea: p: el precio del diamante
w: peso del diamante

Del enunciado:

$\frac{p}{w^2} = \text{cte.}$ (3k | 5k) $w_1 = 3k;\ p_1 = ?$; $w_2 = 5k;\ p_2 = ?$

$$\frac{p_1}{(3k)^2} = \frac{p_2}{(5k)^2} = \frac{3200}{(8k)^2}$$

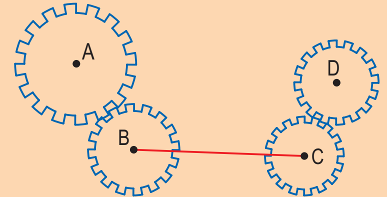
$$\Rightarrow p_1 = \frac{9k^2 \cdot 3200}{64k^2} \Rightarrow p_1 = S/.450$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{25k^2 \cdot 3200}{64k^2} \Rightarrow p_2 = S/.1250$$

Al venderse por separado obtenemos:
S/.450 + S/.1250 = S/.1700

Luego la pérdida será:
S/.3200 – S/.1700 = S/.1500

2 En la figura se muestra un sistema de engranajes. A tiene 80 dientes; B tiene 50 dientes; C tiene 15 dientes y D, 40 dientes. Si A da 120 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda D por minuto?



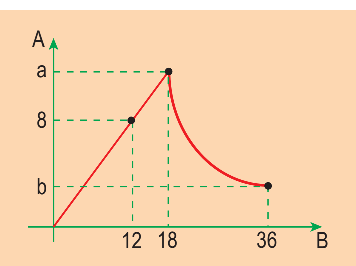
Resolución:

Si la rueda tiene menos dientes, dará más vueltas, entonces son IP.
(n.° de dientes) (n.° de vueltas/min) = k

Luego, entre A y B:
(80)(120) = (50)(n.° de vueltas/min de B)
⇒ n.° de vueltas/min de B = 192
Como B y C están unidas por un mismo eje, ambas darán las mismas vueltas por minuto (192).

Luego, entre C y D:
(15)(192) = (40)(n.° de vueltas/min de D)
⇒ n.° de vueltas/min de D = 72
Por lo tanto, la rueda D da 72 vueltas por minuto.

3 La gráfica muestra los valores que toman dos magnitudes A y B. Calcula: a + b



Resolución:

Del gráfico:
Entre 0 y 18 las magnitudes son DP:

$\frac{8}{12} = \frac{a}{18} \Rightarrow a = 12$ ...(1)

Además, entre 18 y 36 las magnitudes son IP:
$18 \times a = 36 \times b \Rightarrow a = 2b$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): b = 6
Piden: a + b = 12 + 6 = 18

4 Sean A y B dos magnitudes tales que A es IP con $\sqrt{B}$ cuando $B \leq 36$ y A es DP con B^4 cuando $B \geq 36$. Además, si $A = \sqrt{75}$ cuando B = 12, halla A cuando B = 72.

Resolución:

Se tiene:

Cuando $B \leq 36$: $A \cdot \sqrt{B} = \text{cte.}$ ...(1)

Cuando $B \geq 36$: $\frac{A}{B^4} = \text{cte.}$ ...(2)

Como B = 36, permite enlazar las dos condiciones.

Por datos:
$A_1 = \sqrt{75}$ $A_2 = ?$
$B_1 = 12$ $B_2 = 36$
En (1):
$\sqrt{75} \cdot \sqrt{12} = A_2 \cdot \sqrt{36}$
$\Rightarrow A_2 = 5$

Hallamos A, cuando B = 72
$A_2 = 5;\ A = ?$
$B_2 = 36;\ B = 72$
En (2):
$\frac{5}{36^4} = \frac{A}{72^4} \Rightarrow A = 80$

5 La magnitud V es directamente proporcional al cuadrado de la magnitud E. Si en el siguiente cuadro están representados los valores de las magnitudes respectivas, calcula: m + 3n

V	8	50	m
E	n	5	6

Resolución:

Del enunciado: $\frac{V}{E^2} = k$

Del cuadro se tiene: $\frac{50}{5^2} = \frac{50}{25} = 2 = k$

Luego:

$\frac{8}{n^2} = k \quad \wedge \quad \frac{m}{6^2} = k$

$\frac{8}{n^2} = 2 \quad \wedge \quad \frac{m}{36} = 2 \quad \Rightarrow n^2 = 4,\ n = 2 \quad \wedge \quad \Rightarrow m = 72$

Piden: m + 3n = 72 + 3(2) = 78

6 Se sabe que A es IP con B y que B es IP con C. Si cuando A aumenta en 15 unidades, C varía en un 20%, ¿qué pasa con B cuando A aumenta en 25 unidades?

Resolución:

Del enunciado: $A\,.\,B\,.\,C = k$

Luego: $A\,.\,B\,.\,C = (A + 15)\,.\,B\,.\,(C - 20\%C)$

Como A y C son IP, por eso cuando A aumenta en 15 unidades, C disminuye en un 20%.

$$A\,.\,B\,.\,C = (A + 15)(B)\left(\frac{4}{5}C\right)$$
$$5A = 4A + 60$$
$$A = 60$$

Además: $(75)(B)\left(\frac{4}{5}C\right) = (85)(B_1)(C)$

$$12B = 17B_1$$
$$\Rightarrow B_1 = \frac{12}{17}B$$

Por lo tanto, B disminuye a sus $\frac{12}{17}$.

7 Un terreno de forma cuadrada que se encuentra a 150 km al sur de Lima está valorizado en 1000 dólares. Suponiendo que el precio del terreno varía DP a su área e IP a la distancia que lo separa de Lima, ¿qué precio tendría un terreno de forma cuadrada cuyo perímetro sea la mitad del anterior y se encuentre a 50 km de Lima?

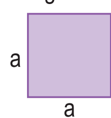
Resolución:

Del enunciado:

P: precio
D_L: distancia a Lima
A: área del terreno

$$\frac{P\,.\,D_L}{A} = k$$

Luego:



$D_L = 150$ km
$P = \$1000$
$A = a^2$
$2p = 4a$

a/2
a/2

2p: perímetro

Entonces: $\frac{1000 \times 150}{a^2} = \frac{P \times 50}{\frac{a^2}{4}}$

$\Rightarrow P = 750$

Por lo tanto, el terreno costará 750 dólares.

8 Dos socios reunieron un capital de 10 000 soles para hacer un negocio. El primero dejó su capital durante 3 meses y el otro durante 2 meses. Halla la diferencia de los capitales aportados, sabiendo que las ganancias fueron iguales.

Resolución:

$C_A + C_B = 10\,000$; $G_A = G_B = G$

Entonces: $\frac{G}{C_A \times 3} = \frac{G}{C_B \times 2} \Rightarrow \frac{C_B}{C_A} = \frac{3}{2}$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{C_B - C_A}{C_B + C_A} = \frac{3-2}{3+2}$$

$$C_B - C_A = 10\,000 \times \frac{1}{5}$$

$\therefore C_B - C_A = S/.2000$

9 Reparte 4890 en 3 partes DP a 12; 15 y 16 y a la vez IP a 9; 6 y 10. Indica la parte mayor.

Resolución:

MCM(9; 6; 10) = 90

	Partes	DP	IP		DP		DP
4890	A	12	9	<>	$\frac{1}{9}$	⇒	$\frac{12}{9} \times 90 = 120k$
	B	15	6	<>	$\frac{1}{6}$	⇒	$\frac{15}{6} \times 90 = 225k$
	C	16	10	<>	$\frac{1}{10}$	⇒	$\frac{16}{10} \times 90 = 144k$

Entonces: A = 120k; B = 225k; C = 144k

Luego: 120k + 225k + 144k = 4890

k = 10

∴ La parte mayor es: 225(10) = 2250

12 Kelly y Carol emprenden un negocio de venta de computadoras. Kelly aporta \$10 000 y Carol \$12 000. Si permanecieron en el negocio 3 y 4 años respectivamente, y si al liquidar el negocio quedó una utilidad por repartir de \$130 000. Determinar:
1. La ganancia de cada una.
2. El monto con el que se retiran Kelly y Carol.

Resolución:

De los datos tenemos:

	Capital	Tiempo	Ganancia
Kelly	10 000	3	G_1
Carol	12 000	4	G_2

De la teoría sabemos:

$$\frac{\text{Ganancia}}{(\text{Capital})(\text{Tiempo})} = k$$

Entonces: $\frac{G_1}{(10\,000)3} = \frac{G_2}{(12\,000)4}$

Simplificamos: $\frac{G_1}{5} = \frac{G_2}{8}$

Por proporciones: $\frac{G_1}{5} = \frac{G_2}{8} = \frac{G_1 + G_2}{13}$

Pero: $G_1 + G_2 = 130\,000$

$$\Rightarrow \frac{G_1}{5} = \frac{130\,000}{13}$$
$$\frac{G_2}{8} = \frac{130\,000}{13}$$

$G_1 = \$50\,000$ $G_2 = \$80\,000$

Calculamos los montos sabiendo:

Monto = Capital + Ganancia

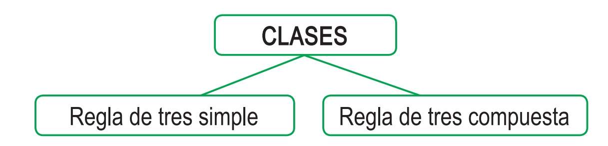
Kelly: $M_1 = 10\,000 + 50\,000 = \$60\,000$

Carol: $M_2 = 12\,000 + 80\,000 = \$92\,000$

REGLA DE TRES

DEFINICIÓN

Es una aplicación que consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud relacionando dos o más magnitudes proporcionales.



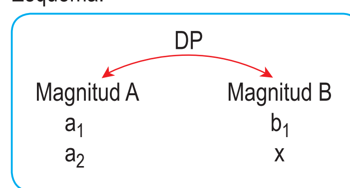
REGLA DE TRES SIMPLE

Se genera cuando se comparan dos magnitudes. Dependiendo cómo se relacionen las magnitudes en comparación, una regla de tres simple puede ser directa o inversa.

Regla de tres simple directa

Se plantea cuando las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales.

Esquema:



Método de solución:

Como A DP B, se cumple: $\frac{A}{B} = \text{cte}$

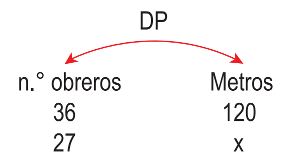
Luego: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x} \Rightarrow a_1x = a_2b_1$

$$\therefore \; x = \frac{a_2 \,.\, b_1}{a_1}$$

Ejemplo:

Si 36 obreros cavan 120 m de zanja diariamente, ¿cuál será el avance diario de 27 obreros?

Resolución:



Luego:

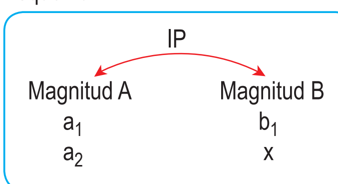
$$\frac{36}{120} = \frac{27}{x} \Rightarrow x = \frac{27 \times 120}{36}$$

$\therefore \; x = 90$ m

Regla de tres simple inversa

Resulta de comparar dos magnitudes inversamente proporcionales.

Esquema:



Método de solución:

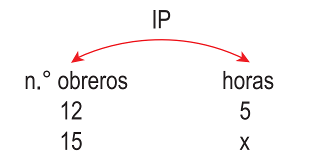
Como A IP B, se cumple: A . B = cte.

Luego: $a_1 \,.\, b_1 = a_2 \,.\, x$

$$\Rightarrow \; x = \frac{a_1 \times b_1}{a_2}$$

Ejemplo:

Una cuadrilla de 12 obreros puede llenar un techo en 5 horas. ¿Qué tiempo tardarían 15 obreros, en llenar el mismo techo?



Luego:

$12 \times 5 = 15 \,.\, x$

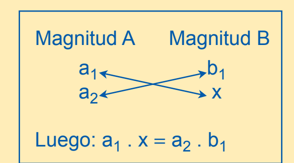
$60 = 15 \,.\, x$

$x = 4$ horas

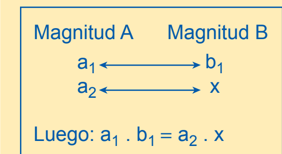
Atención

Metodo práctico

Si dos magnitudes son DP, su producto en aspa es constante.



Si dos magnitudes son IP, su producto en línea es constante.



REGLA DE TRES COMPUESTA

Se plantea cuando intervienen más de dos magnitudes.

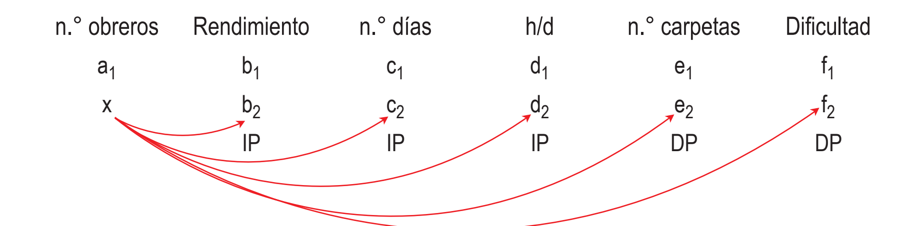
Ejemplo:
Un grupo de a_1 obreros en c_1 días, a razón de d_1 h/d de trabajo pueden hacer e_1 carpetas, siendo su dificultad como f_1. ¿Cuántos obreros cuyo rendimiento es b_2/b_1 del anterior, en c_2 días, a razón de d_2 h/d de trabajo, pueden hacer e_2 carpetas, siendo su dificultad como f_2?

Métodos de resolución

1. Método de comparación

La magnitud donde se encuentra la incógnita se compara con cada una de las demás, resultando en cada caso, si son DP o IP, enseguida las magnitudes se dividen o multiplican, según correspondan.

Del ejemplo anterior, se tiene:



Se cumple: $x = a_1\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\left(\frac{e_2}{e_1}\right)\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$

Recuerda

La regla de tres compuesta se utiliza para comparar más de dos magnitudes simultáneamente, ya que esta se compone de varias reglas de tres simple.
Lo puedes verificar observando el primer ejemplo, compara la magnitud cuyo valor queremos hallar con las demás magnitudes, vemos que en cada caso utilizas reglas de tres simple.

2. Método de las rayas

Las magnitudes que intervienen, se clasifican en 3 partes:

Causa	Circunstancia	Efecto
Realizadores de la obra o acción y condiciones que tienen para realizarla. Ejemplo: • Obreros • Equipos • Animales • Habilidad • Rendimiento, etc.	Condiciones en el tiempo para realizar la obra. Ejemplo: • Días • Horas diarias • Raciones diarias, etc.	La obra en sí, lo realizado y los inconvenientes o condiciones que pone el medio para la realización del trabajo. Ejemplo: • Dificultad • Resistencia del medio • Medidas de la obra, etc.

Causa		Circunstancia		Efecto	
n.º obreros	Rendimiento	n.º días	h/d	n.º carpetas	Dificultad
a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1
x	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2

Se cumple, que el producto de las cantidades siguiendo la dirección de las rayas es constante.

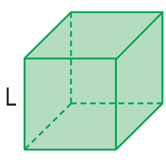
$$a_1 . b_1 . c_1 . d_1 . e_2 . f_2 = x . b_2 . c_2 . d_2 . e_1 . f_1$$

Problemas resueltos

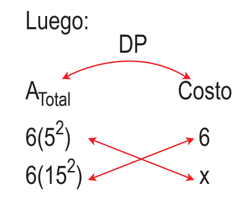
1 Si al pintar un cubo cuya arista mide 5 cm se gastó S/.6, ¿cuánto se gastará para pintar otro cubo cuya arista mide 15 cm?

Resolución:

A mayor área será mayor el costo.



$A_{total} = 6L^2$



Entonces:

$6 \,.\, 5^2 \,.\, x = 6(15^2)6$

$25x = 15 \times 15 \times 6 \Rightarrow x = S/.54$

2 Si 8 obreros terminan una obra en 6 días, ¿en cuántos días terminarán la misma obra 12 obreros?

Resolución:

Ambas magnitudes son IP.

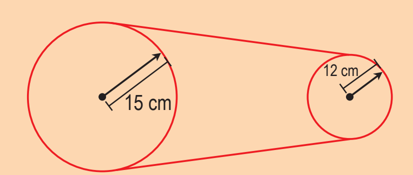
n.° obreros	Días
8	6
12	x

Entonces:

$8 \times 6 = 12 \,.\, x$

$48 = 12 \,.\, x \Rightarrow x = 4$ días

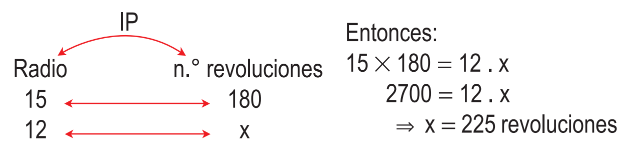
3 Del gráfico, si la rueda mayor da 180 revoluciones, ¿cuántas revoluciones dará la menor?



Resolución:

El radio es inversamente proporcional al número de revoluciones.

Luego:



Entonces:

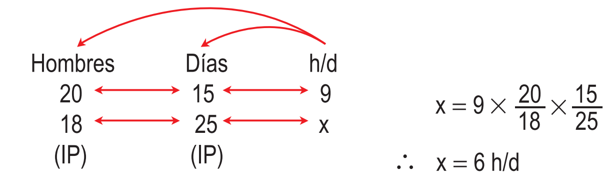
$15 \times 180 = 12 \,.\, x$

$2700 = 12 \,.\, x$

$\Rightarrow x = 225$ revoluciones

4 20 hombres trabajando 9 horas diarias pueden hacer una obra en 15 días. 18 hombres, en cuántas horas diarias pueden hacer la obra con 25 días.

Resolución:



$$x = 9 \times \frac{20}{18} \times \frac{15}{25}$$

$\therefore\ x = 6$ h/d

5 15 albañiles trabajando 12 h/d, durante 16 días, pueden hacer una zanja de 4 m de largo; 2 m de ancho y 1,5 m de profundidad. Si 20 albañiles trabajando x horas diarias, durante 18 días, pueden hacer una zanja de 8 m de largo; 1,5 de ancho y 2 m de profundidad. Calcula x.

Resolución:

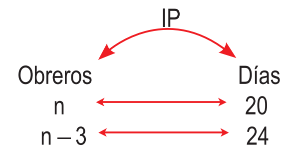
IP Albañiles	Horas	IP Días	DP Obra
15	12	16	$12\ m^3$
20	x	18	$24\ m^3$

$$x = 12 \times \frac{15}{20} \times \frac{16}{18} \times \frac{24}{12}$$

$x = 16$ horas

6 Un grupo de obreros pueden hacer una obra en 20 días, pero debido a que tres de ellos faltaron, los restantes tuvieron que trabajar 4 días más, ¿cuántos obreros trabajaron?

Resolución:



Se cumple: $20n = (n - 3)\,24$

$20n = 24n - 72$

$72 = 4n \Rightarrow n = 18$

$\therefore$ Trabajaron: $18 - 3 = 15$ obreros.

7 Se hacen disolver 240 g de azúcar en 5 L de agua. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a esta mezcla para que un litro de agua de la nueva mezcla no tenga sino 8 g de azúcar?

Resolución:

Si por cada litro debe haber 8 g. Con 240 gramos, ¿cuántos litros habrá?

Agua (L)	(DP)	Gramos(g)
1		8
x		240

$$x = \frac{1 \,.\, 240}{8} = 30$$

Como ya se tienen 5 L, luego se aumentará: $30 - 5 = 25$ L

8 Un hombre y dos mujeres pueden hacer una obra en 20 días. Determina el tiempo necesario para que dos hombres y una mujer puedan hacer un trabajo 7 veces más grande que el anterior, sabiendo que el trabajo del hombre y el de la mujer están en la relación de 3 a 2.

Resolución:

IP	IP	DP
Obreros	Días	Obra
H + 2M	20	1
2H + M	x	8

Además se sabe que: $\frac{H}{M} = \frac{3k}{2k}$

Por regla de tres tenemos:

$$x = 20 \times \frac{(H + 2M)}{(2H + M)} \times 8 = 20 \times \frac{7k}{8k} \times 8$$

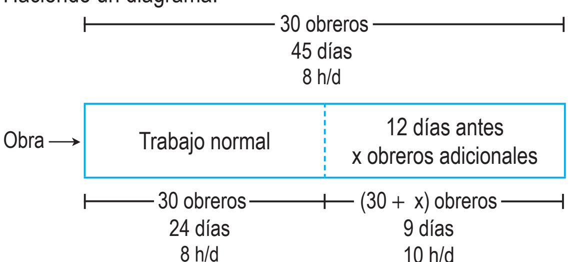
$x = 140$

Luego necesitan 140 días para la nueva obra.

9 Se pensó terminar una obra en 45 días, empleando 30 obreros, laborando 8 h/d. Luego de 24 días de trabajo, se pidió terminar la obra 12 días antes del plazo fijado. ¿Cuántos obreros más se necesitaron, si se aumentó en 2 h la jornada de trabajo?

Resolución:

Haciendo un diagrama:



Luego, como las magnitudes que intervienen son IP se cumple:

$30 \times 45 \times 8 = 30 \times 24 + (30 + x) \times 9 \times 10$

$10\,800 = 5760 + 2700 + 90x$

$2340 = 90x \Rightarrow x = 26$

$\therefore$ Se necesitan 26 obreros adicionales.

10 Se contrató a una constructora para que realice una obra en 30 días empleando 15 obreros y trabajando 10 horas diarias. Después de 8 días de trabajo se acordó que la obra quedase terminada 12 días antes del plazo estipulado y así se hizo. ¿Cuántos obreros más se contrataron teniendo en cuenta que se aumentó en 1 hora el trabajo diario?

Resolución:

Primero, determinamos la cantidad de obra realizada en 8 días de trabajo.

Días	(DP)	Obra
30		1
8		x

$x = 1 \times \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

Entonces, falta 1 – 4/15 = 11/15 que lo deben hacer en los 10 días restantes; para lo cual se contratan **y** obreros más.

n.° obreros	n.° días	h/d	Obra
15	30	10	1
15 + y	10	11	11/15

$15(30)(10)\,\frac{11}{15} = (15 + y)(10)(11)(1)$

$y = 15$

Por lo tanto, se contrataron 15 obreros más.

11 Un grupo de 24 obreros al 80% de su capacidad en 18 días a razón de 8 horas diarias de trabajo pueden hacer 400 escritorios, siendo su dificultad como 6. ¿Con cuántos obreros al 100% de su capacidad en 12 días a razón de 9 horas diarias de trabajo se pueden hacer 600 carpetas, siendo su dificultad como 5?

Resolución:

n.° ob.	Rend.	n.° días	h/d	n.° esc.	Dif.
24	80	18	8	400	6
x	100	12	9	600	5

Empleando el método de las rayas, tenemos:

$24(80)(18)(8)(600)(5) = x(100)(12)(9)(400)(6)$

$x = 32$

Por lo tanto, se necesitarán 32 obreros.

12 Ocho obreros han realizado los 3/8 de una obra en nueve días. Si se retiran dos obreros y los restantes aumentan su rendimiento en 25%, ¿en cuántos días se hizo toda la obra?

Resolución:

Las magnitudes que intervienen son: número de obreros, número de días, obra y rendimiento. Como se ha realizado los 3/8 de la obra, faltará 5/8 de la obra.

Número de obreros	Rendimiento	Número de días	Obra
8	100%	9	3/8
6	125%	x	5/8

Aplicaremos el método de magnitudes proporcionales, para lo cual determinamos la relación entre la magnitud que contiene a la incógnita con las demás magnitudes, del siguiente modo:

Número de días — IP → Número de obreros
Número de días — IP → Rendimiento
Número de días — DP → Obra

$$\frac{(\text{n.° de días})(\text{n.° de obreros})(\text{Rendimiento})}{\text{Obra}} = K\ (\text{cte})$$

Aplicando la fórmula deducida por magnitudes proporcionales, tendremos:

$$\frac{(9)(8)(100)}{3} = \frac{(x)(6)(125)}{5}$$

$x = 16$ días

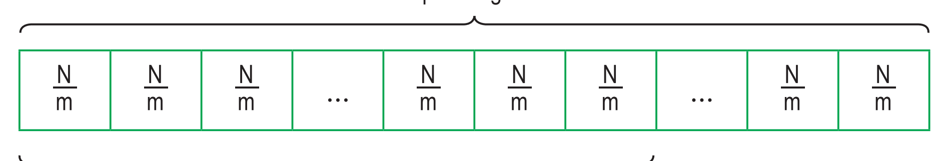
Luego, toda la obra se hizo en: 9 + 16 = 25 días

PORCENTAJES

A

DEFINICIÓN

Se denomina tanto por cuanto a la expresión que representa al número de partes (tanto) que se ha tomado de una cantidad dividida en partes iguales (cuanto).



n por m de N <> $\frac{n}{m} \times N$

Ejemplos:

- 3 por 5 de 245 <> $3/5 \times 245 = 147$
- 7 por 4 de 46 <> $7/4 \times 46 = 80{,}5$

TANTO POR CIENTO

Es un caso particular del tanto por cuanto en el que la cantidad o el todo ha sido dividido en 100 partes iguales.

Ejemplos:

- 17 por ciento de 280 <> $17/100 \times 280 = 17\%(280)$
- 63 por ciento de 500 <> $\frac{63}{100} \times 500 = 63\%(500)$

PORCENTAJE

Es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

Ejemplos:

- $80\%(230) = \frac{80}{100} \times 230 = 184$ (↓ porcentaje)
- $42\%(90) = \frac{42}{100} \times 90 = 37{,}8$ (↓ porcentaje)

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

1. $a\%N + b\%N = (a + b)\%N$

   Caso especial: $N = 100\%N$
   $N + b\%N = 100\%N + b\%N = (100 + b)\%N$

2. $a\%N - b\%N = (a - b)\% N$

   Caso especial: $N = 100\%N$
   $N - b\%N = 100\%N - b\%N = (100 - b)\%N$

3. $a \times (b\%N) = (a \times b)\%N$

4. El a% del b% del c% de N es:
   $a\% \times b\% \times c\% \times N$

DESCUENTOS SUCESIVOS

Si al precio de un artículo que cuesta S/.1400 se le hace dos descuentos sucesivos de 20% y 15%, ¿cuál será el nuevo precio?

Resolución:

- Aplicando el $1.^{er}$ descuento: $1400 - 20\%\ (8400) = 80\%(1400) = 1120$
- Aplicando el 2.° descuento: $1120 - 15\%(1120) = 85\%(1120) = 952$

∴ El nuevo precio es S/.952.

Observación

En algunos casos es necesario expresar el tanto por ciento como una fracción. Veamos algunas equivalencias:

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$
$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$
$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$
$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Cálculo de porcentajes

- ¿Cuál es el 27% de 4600?

  4600 ——— 100%
  x ——— 27%

  $$x = \frac{4600 \times 27\%}{100\%} = 1242$$

- ¿Qué porcentaje es 387 de 860?

  860 ——— 100%
  387 ——— x

  $$x = \frac{387 \times 100\%}{860} = 45\%$$

- ¿De qué cantidad es 731 su 43%?

  731 ——— 43%
  x ——— 100%

  $$x = \frac{731 \times 100\%}{43\%} = 1700$$

Nota

$$100\%N = \frac{100}{100}N = N$$

Recuerda

Todo aumento o descuento sucesivo se hace tomando como referencia un todo (100%).

Nota

Los tanto por ciento de un **descuento** sucesivo no se pueden sumar ya que no afectan a una misma cantidad.

Los tanto por ciento de un **aumento** sucesivo no se pueden sumar ya que no afectan a una misma cantidad.

Observación

Gráficamente se tiene:

ganancia: P_C → P_V

pérdida: P_V ← P_C

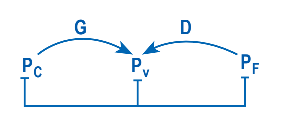
gastos: G_N → G_B

Nota

Se cumple:

$$P_C + G = P_F - D$$

Gráficamente:



Recuerda

- Las ganancias se representan como un tanto por ciento del precio de costo.
- Los descuentos se representan como un tanto por ciento del precio fijado.

Descuento único

Dos descuentos sucesivos $d_1\%$ y $d_2\%$ equivalen a un descuento único de:

$$\left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$$

En general, m descuentos sucesivos $d_1\%$; $d_2\%$; ...; d%, equivalen a un descuento único de:

$$\left[100 - \frac{(100 - d_1)(100 - d_2)...(100 - d_m)}{100^{m-1}}\right]\%$$

AUMENTOS SUCESIVOS

Si al precio de un artículo que cuesta S/.1720 se le hace dos aumentos sucesivos de 10% y 25%, ¿cuál será el nuevo precio?

Resolución:

- Aplicando el 1.er aumento: $1720 + 10\%(1720) = 110\%(1720) = 1892$
- Aplicando el 2.° aumento: $1892 + 25\%(1892) = 125\%(1892) = 2365$

∴ El nuevo precio es S/.2365.

Aumento único

Dos aumentos sucesivos de $a_1\%$ y $a_2\%$ equivalen a un aumento único de:

$$\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$$

En general, m aumentos sucesivos $a_1\%$; $a_2\%$; ...; a_m equivalen a un aumento único de:

$$\left[\frac{(100 + a_1)(100 + a_2)...(100 + a_m)}{100^{m-1}} - 100\right]\%$$

APLICACIONES COMERCIALES DEL TANTO POR CIENTO

Se presentan los siguientes casos:

1. Precio de venta (P_V) < Precio de costo (P_C)
   Se cumple:
   $$P_V = P_C - \text{pérdida}$$
2. Precio de venta (P_V) = Precio de costo (P_C)
   En este caso, no hay ganancia ni pérdida.
3. Precio de venta (P_V) > Precio de costo (P_C)
   Se cumple:
   $$P_V = P_C + \text{ganancia}$$
   $$G_B = G_N + \text{gastos}$$

Donde:
G_B: ganancia bruta (ganancia aparente)
G_N: ganancia neta (ganancia real)

Cuando el comerciante fija el precio de la mercadería y el cliente obtiene una rebaja al comprar dicha mercadería, entonces se cumple:

$$P_V = P_F - \text{descuento}$$

Donde:
P_F: precio fijado o precio de lista (P_L)

Ejemplo:
Christian compra un artículo en S/.8000, ¿cuál debe ser el precio a que debe fijarlo para que rebajando el 20% de este precio aún gane el 30% del precio de costo?

Resolución:
P_C = S/.8000, P_F = ?, $D = 20\%P_F$, $G = 30\%P_C$
Sabemos:
$P_V = P_C + G$
$P_V = 8000 + 30\%(8000) = 10\,400$
$P_V = 10\,400$

Como:
$P_V = P_F - D$
$10\,400 = P_F - 20\%P_F = 80\%P_F$
$10\,400 = \frac{80}{100}P_F = \frac{4}{5}P_F$
$\frac{10\,400 . 5}{4} = P_F$

∴ P_F = S/.13 000

Problemas resueltos

1 Halla el 9 por 10 del 4 por 50 del 8 por 150 del 25 por 36 de 90 000.

Resolución:

$$\frac{9}{10}\times\frac{4}{50}\times\frac{8}{150}\times\frac{25}{36}\times 90\,000 = 240$$

2 ¿Cuál es el número cuyo 20% es 300?

Resolución:

$$x \,.\, 20\% = 300$$
$$x \,.\, \frac{20}{100} = 300$$
$$x = 5\times 300$$
$$\therefore x = 1500$$

3 Tres descuentos sucesivos del 10%; 30% y 50% equivalen a un único descuento de:

Resolución:

$90\% \times 70\% \times 50\%$

$$\frac{90}{100}\times\frac{70}{100}\times\frac{50}{100} = 31,5\%$$

Equivalen a un único descuento de: $100\% - 31,5\% = 68,5\%$

4 Si el sueldo de un obrero es 500 soles mensuales y sufre dos aumentos sucesivos del 20% y 30% respectivamente, ¿cuánto será lo que recibirá al final del mes?

Resolución:

Calculamos el aumento único:

$$Au = \left(20 + 30 + \frac{20\,.\,30}{100}\right)\% = 56\%$$

El nuevo sueldo será: sueldo + (Au)(sueldo)

$\Rightarrow 500 + (56\%)(500) = S/.780$

5 ¿Cuál es el precio de costo de una bicicleta cuyo precio de lista es de S/.600, sabiendo que luego de hacer un descuento del 30% aún se gana el 20%?

Resolución:

$P_L = S/.600$

$D = 30\%P_L = 30\%(600) = 180$

$G = 20\%P_C$

Pero:

$P_V = P_L - D = 600 - 180 = 420$

$\Rightarrow P_V = S/.420$

$P_V = P_C + G = P_C + 20\%P_C = 120\%P_C$

Entonces: $420 = 120\%P_C$

$$P_C = \frac{420\times 100}{120} = 350$$

$\therefore P_C = S/.350$

6 Un ejército durante una campaña es atacado 2 veces, muriendo el 10% de los soldados que batallaban en cada ocasión. ¿Cuántos hombres tenía el ejército al iniciar la campaña, si se terminó la campaña con 7290 soldados?

Resolución:

Sea N la cantidad inicial de soldados. Aplicando la forma de descuentos sucesivos del 10% más 10%.

$$Du = \left[10 + 10 - \frac{10\times 10}{100}\right]\% = 19\%$$

Entonces, al término de la campaña quedan:

$(100 - 19)\%N = 81\%N$

Por dato:

$81\% \times N = 7290$

$N = 9000$

Por lo tanto, la campaña se inició con 9000 soldados.

7 El 20% del 30% de K es igual al 50% de M.¿Qué porcentaje de (3K + 2M) es (2K + M)?

Resolución:

Del enunciado:

$(20\%)(30\%)(K) = (50\%)M$

$$\frac{20}{100}\times\frac{30}{100}\times K = \frac{50}{100}\times M$$

$\Rightarrow 6K = 50M$

$\Rightarrow 3K = 25M$

Nos piden:

$(x\%)(3K + 2M) = 2K + M$

$$\frac{x}{100}(25M + 2M) = 2\left(\frac{25M}{3}\right) + M$$

$$\frac{x}{100}(27M) = \frac{53M}{3}$$

$x = 65,43$

$\therefore$ (2K + M) es el 65,43% de (3K + 2M).

8 En una reunión hay 100 personas, de las cuales 70% son mujeres. ¿Cuántas parejas deben llegar a la reunión para que el número de hombres sea el 60% de las mujeres?

Resolución:

$H + M = 100$

$\downarrow \quad \downarrow$

$30 \quad 70$

Si llegan k parejas, se tiene:

$30 + k = 60\%(70 + k)$

$30 + k = \frac{3}{5}(70 + k)$

$150 + 5k = 210 + 3k$

$2k = 60 \Rightarrow k = 30$

$\therefore$ Deben llegar 30 parejas.

9 Un texto se ofrece recargándole el a por b de su precio de costo; un alumno de la UNI obtiene una rebaja del c por b y lo compra. Si el vendedor no ganó ni perdió, el valor de c es:

Resolución:

Del enunciado:

$P_L = P_C + \frac{a}{b}P_C = \left(1 + \frac{a}{b}\right)P_C$ ... (1)

$P_V = P_L - \frac{c}{b}P_L = \left(1 - \frac{c}{b}\right)P_L$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2):

$P_V = \left(1 - \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right)P_C$ ... (3)

Además, como el vendedor no ganó ni perdió, entonces: $P_V = P_C$

Reemplazando en (3): $P_C = \left(1 - \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{b}\right)P_C$

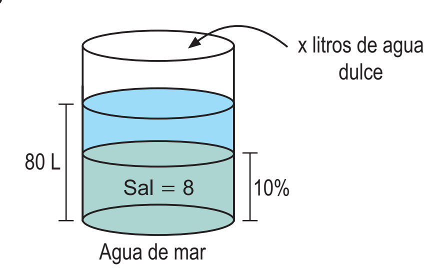
$1 = 1 + \frac{a}{b} - \frac{c}{b} - \frac{ac}{b^2}$

$c\left(\frac{b+a}{b^2}\right) = \frac{a}{b} \Rightarrow c = \frac{ab}{a+b}$

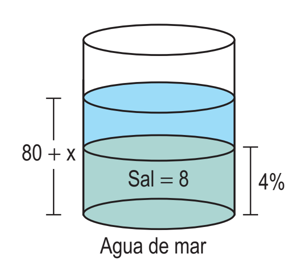
10 El 10% del peso del agua de mar es sal. ¿Cuántos litros de agua dulce se debe añadir a 80 L de agua de mar para que la concentración de la sal sea del 4%?

Resolución:

1.er caso



2.° caso



Entonces: $8 = 4\%(80 + x)$

$80 + x = 200$

$\therefore x = 120$ L

11 El precio de venta de un televisor es S/.800. Si la ganancia neta es S/.60, los gastos son el 20% de la ganancia bruta y al final se desea hacer una rebaja del 4% del precio de costo, halla el precio de lista de dicho televisor.

Resolución:

$P_V =$ S/.800

$G_{neta} =$ S/.60

Gastos $= 20\%\ G_{bruta}$

$G_{neta} = G_{bruta} -$ Gastos

$60 = G_{bruta} - 20\%G_{bruta}$

$60 = 80\%G_{bruta}$

S/.75 $= G_{bruta}$

Luego hallamos el precio de costo:

$\Rightarrow P_V = P_C + G_{bruta}$

$800 = P_C + 75$

S/.725 $= P_C$

Nos piden P_L:

$P_V = P_L -$ Descuento

$800 = P_L - 4\%(725)$

$P_L =$ S/.829

12 Un vendedor decide aumentar en x% el precio de un artículo, pero al momento de venderlo realiza una rebaja del y% notando ahora que el precio es igual al inicial, entonces decide rematarlo, para lo cual realiza dos descuentos sucesivos del x% y del y%. Si se sabe que (x/5) y (y/5) son números consecutivos, halla el porcentaje equivalente de descuento.

Resolución:

Sea el precio inicial: P

Precio final: $(1 + x\%)P$

Precio de venta: $(1 - y\%)(1 + x\%)P = P$

- Simplificando:

  $100(x - y) = xy$ ...(1)

  Dado: $\frac{x}{5} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow x - y = 5 \Rightarrow x = y + 5$

- Reemplazando en (1):

  $x = 25$

  $y = 20$

- Descuentos sucesivos del 25% y 20% equivalen:

  $Du = \left[25 + 20 - \frac{25 \times 20}{100}\right]\%$

  $Du = 40\%$

MEZCLA

DEFINICIÓN
Es la unión de dos o más sustancias o ingredientes susceptibles de unirse en cualquier proporción, conservando cada una de ellas su propia naturaleza.

REGLA DE MEZCLA
Es el procedimiento que tiene por finalidad resolver dos tipos de problemas: conocer el precio medio de la mezcla y determinar la proporción en que se deben mezclar los ingredientes.

A) **Directa:** consiste en determinar el precio medio (P_m) de una mezcla, conocidas las cantidades que intervienen de cada uno de los componentes y sus respectivos precios unitarios.

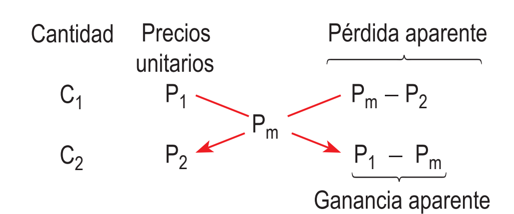
Precios : P_1 ; P_2 ; P_3; ...;P_n

Cantidades: C_1 ; C_2 ; C_3; ...;C_n

Entonces:

$$P_m = \frac{P_1C_1 + P_2C_2 + P_3C_3 + ... + P_nC_n}{C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n}$$

B) **Inversa:** consiste en determinar la relación en que intervienen los componentes, conociendo los precios unitarios y el precio medio.



Entonces:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_m - P_2}{P_1 - P_m}$$

Propiedad:

$P_2 < P_m < P_1$

Observación

Se considera:
Grado del agua < > 0° ó 0%

Grado de alcohol puro < > 100° ó 100%

MEZCLA ALCOHÓLICA
Son mezclas de alcohol puro y agua destilada.

Grado de una mezcla alcohólica (G)
Indica la razón que existe entre el volumen de alcohol puro y el volumen de la mezcla.

$$G = \frac{V_{\text{alcohol puro}}}{V_{\text{mezcla}}} \cdot 100$$

Donde:
G se expresa en grado o porcentajes.

Grado medio(G_m)

Grados: G_1 G_2 G_3 ... G_n

Volúmenes: V_1 V_2 V_3 ... V_n

Entonces:

$$G_m = \frac{G_1V_1 + G_2V_2 + G_3V_3 + ... + G_nV_n}{V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n}$$

ALEACIÓN
Es la mezcla que se realiza fundiendo dos o más metales. Generalmente las aleaciones se realizan entre un metal fino con otro que se considera como ordinario.

Ley de una aleación (L)
Es la relación que existe entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación.

$$L = \frac{W_{\text{fino}}}{W_{\text{total}}}$$; Donde: $0 \leq L \leq 1$

Liga de una aleación
Es la relación que existe entre el peso del metal ordinario y el peso total de la aleación.

$$\text{Liga} = \frac{W_{\text{ordinario}}}{W_{\text{total}}}$$

Atención

Se cumple:

$L + \text{Liga} = 1$

Propiedad

Para el caso en que el metal fino sea el oro, su ley se puede expresar en quilates.

$$L = \frac{K}{24}$$

Donde:
K es el número de quilates

Nota

Se cumple:
k = 24L

Ley media (L_m)

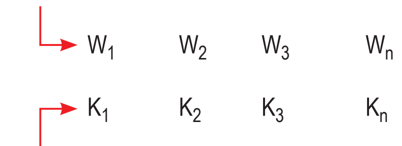
Sean:

Pesos de los metales: $W_1; W_2; W_3; ...; W_n$ Leyes de las aleaciones: $L_1; L_2; L_3; ...; L_n$

Entonces: $$L_m = \frac{W_1L_1 + W_2L_2 + W_3L_3 + ... + W_nL_n}{W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n}$$

Quilate medio (K_m)

Sean:



Entonces:

$$K_m = \frac{W_1K_1 + W_2K_2 + W_3K_3 + ... + W_nK_n}{W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_n}$$

Observación

- **Metales finos**
  Oro (Au); plata (Ag); platino (Pt); etc.
- **Metales ordinarios**
  Cobre (Cu); plomo (Pb); estaño (Sn); etc.

Ejemplos:

1. Se mezclan 3 tipos de vino: 20 L de S/.3 el litro, 50 L de S/.5 el litro y 30 L de S/.4 el litro. ¿Cuánto cuesta cada litro de mezcla?

   Resolución:

   $$P_m = \frac{20(3) + 50(5) + 30(4)}{20 + 50 + 30}$$

   $P_m = 4{,}3$

   $\therefore$ Cada litro cuesta S/.4,3.

2. Se han fundido tres lingotes de plata cuyos pesos son 300 g, 700 g y 500 g, y leyes de 400; 300 y 600 milésimas, respectivamente. Halla la ley de la aleación resultante.

   Resolución:

   $$L_m = \frac{300(400) + 700(300) + 500(600)}{300 + 700 + 500} = 420$$

   $\therefore$ La ley de la aleación resultante es 420 milésimas.

3. Se hace una mezcla de vino de S/.4 y S/.9 el litro en la proporción de 3 a 2 respectivamente. ¿Cuál es el precio medio por litro de vino?

   Resolución:

   Por cada 3k litros de S/.4, intervienen 2k litros de S/.9, entonces:

   $$P_m = \frac{3k \times 4 + 2k \times 9}{3k + 2k} = \frac{12k + 18k}{5k} = \frac{30k}{5k}$$

   $\therefore$ P_m = S/.6

4. ¿Cuántos kilogramos de un lingote de ley 0,600 será necesario fundir con otro lingote de 15 kg y 0,840 de ley, para obtener un lingote de 0,700 de ley?

   Resolución:

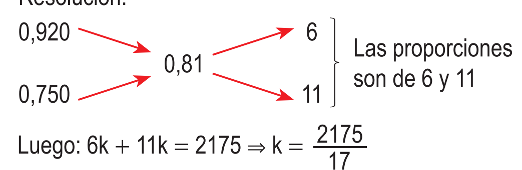
   Por propiedad:

   $$0{,}700 = \frac{x \times 0{,}6 + 15 \times 0{,}840}{x + 15}$$

   $\therefore$ x = 21 kg

5. Se tienen 2 lingotes de oro, el 1.° de 0,920 de ley y el 2.° de 0,750. Se funden juntos y se obtiene un lingote que pesa 2175 g de ley 0,810. ¿Cuánto pesa cada lingote?

   Resolución:

   Luego: $6k + 11k = 2175 \Rightarrow k = \frac{2175}{17}$

   $\therefore$ El primer lingote pesa 767,6 g y el segundo pesa 1407,4 g.

Problemas resueltos

1 Se tienen 4 lingotes de plata cuyas leyes son 0,100; 0,200; 0,300 y 0,400; cuyos pesos son 200 g; 300 g; 400 g y 500 g respectivamente. Calcula la ley de la aleación resultante.

Resolución:

$$L_m = \frac{0,100\times 200 + 0,200\times 300 + 0,300\times 400 + 0,400\times 500}{200+300+400+500}$$

$$L_m = \frac{400}{1400} \qquad \therefore\ L_m = 0,285$$

2 Se quiere obtener 20 kilogramos de un ingrediente de 600 soles el kilogramo, mezclando cantidades convenientes de 800 y 550 soles el kilogramo. ¿Qué cantidad se debe usar de cada ingrediente?

Resolución:

Por regla de mezcla inversa:

Cantidad	P. unit.		Diferencia
Cantidad 1 = C_1	800	P_m 600	600 – 550 = 50
Cantidad 2 = C_2	550		800 – 600 = 200

Entonces:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 4C_1$$

Del dato:

$C_1 + C_2 = 20$

$C_1 + 4C_1 = 20 \ \Rightarrow \ C_1 = 4$ kg

$\therefore C_2 = 16$ kg

3 Se tiene 360 g de una fundición. Al fundir 2 lingotes de leyes 850 y 760 milésimas se obtiene una aleación de 840 milésimas. ¿Qué peso de metal de aleación tiene el primero?

Resolución:

Cantidad	Leyes		
x	850	840	840 – 760
(360 – x)	760		850 – 840

De donde: $\dfrac{x}{360-x} = \dfrac{840-760}{850-840}$

$x = 320$

Pero se sabe que: liga + ley = 1

Entonces: $Metal_1 = (1 - 0,85)\ .\ 320$

$Metal_1 = 48$ g

4 Se mezclan 13 kg de cebada de S/.34,2 el kilo con 35 kg de S/.26,15 el kilo y 42 kg de S/.17,1 el kilo, si al ser tostada la cebada pierde 5% de su peso total. ¿A cómo debe vender el kilo de cebada tostada para ganar el 20%?

Resolución:

$Pc = 13(34,2) + 35(26,15) + 42(17,1)$

$Pc = 2078,05$

Pierde el 5% de su peso

$\Rightarrow$ Su peso tostado es: $\dfrac{95}{100}(13+35+42) = 85,5$

Sea x el precio por kilogramo de cebada tostada.

Luego: $Pv = Pc + G$

$85,5\ .\ x = 2078,05 + 20\%Pc$

$85,5x = 2078,05 + 20\%\ 2078,05 = 2493,66$

$85,5x = 2493,66$

$\therefore\ x = S/.29,17$ kg

5 Se disponen de tres lingotes de plata cuyas leyes son 0,950; 0,900 y 0,875. ¿Cuántos kilogramos se deben tomar del primero para obtener 10 kilogramos de plata cuya ley sea 0,925; tomando partes iguales de las otras dos?

Resolución:

Tomemos n kg del primero y z de los otros lingotes (son iguales). Entonces:

$$L_m = \frac{0,950n + 0,900z + 0,875z}{10} = 0,925$$

$0,950n + 1,775z = 9,25$

$$0,950n + 1,775\left(\frac{10-n}{2}\right) = 9,25$$

$0,950n + 8,875 - 0,8875n = 9,25$

$0,0625n = 0,3750$

$n = 6$ kg

6 Se mezclan dos clases de café en proporción de 1 a 2; y la mezcla se vende con un 5% de beneficio.
Después se mezclan en proporción de 2 a 1 y se vende la mezcla con 10% de beneficio. El precio de venta es igual en ambos casos. Halla la relación de precios de las clases de café.

Resolución:

Caso I:

$$Pc_1 = \frac{1P_1 + 2P_2}{3},\ G = 5\%$$

$$\Rightarrow Pv_1 = \frac{105}{100}\left(\frac{P_1 + 2P_2}{3}\right)$$

Caso II:

$$Pc_2 = \frac{2P_1 + P_2}{3},\ G = 10\%$$

$$\Rightarrow Pv_2 = \frac{110}{100}\left(\frac{2P_1 + P_2}{3}\right)$$

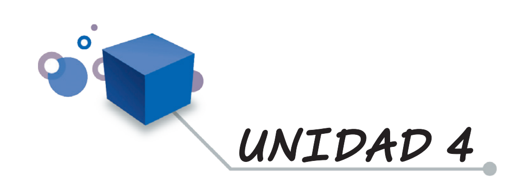
Por dato:

$Pv_1 = Pv_2$

$21(P_1 + 2P_2) = 22(2P_1 + P_2)$

$20P_2 = 23P_1$

$\Rightarrow \dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{20}{23}$



INTERÉS

> **Recuerda**
> Cuando no se menciona la unidad de tiempo referida a la tasa, se asumirá una tasa anual.

REGLA DE INTERÉS

Es un procedimiento por medio del cual se determina la ganancia o beneficio, generado por un capital que ha sido depositado, prestado o invertido, en un determinado tiempo y a una determinada tasa de interés.

Elementos

- **Capital (C):** es el dinero, bien material, servicio o esfuerzo humano que se va a ceder o imponer durante algún tiempo para generar una ganancia.
- **Tiempo (t):** es el periodo durante el cual se cede o se impone un capital.
- **Tasa de interés (r%):** llamada también rédito, es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias en un cierto tiempo.
- **Interés (I):** es la ganancia, beneficio o utilidad que produce el capital, durante cierto tiempo y bajo ciertas condiciones.
- **Monto (M):** es la suma del capital más sus intereses producidos en un determinado tiempo.

Tasas equivalentes

Dos tasas son equivalentes si una misma cantidad colocada en dos sitios durante un mismo tiempo produce la misma ganancia.
Ejemplos:

6% bimestral < > 9% trimestral < > 3% mensual

12% cuatrimestral < > 18% semestral < > 36% anual

> **Nota**
> Las unidades de la tasa y el tiempo deben ser homogéneos.

t	r%
n.° de años	anual
n.° de bimestres	bimestral
n.° de semestres	semestral
n.° de días	diario

CLASES DE INTERÉS

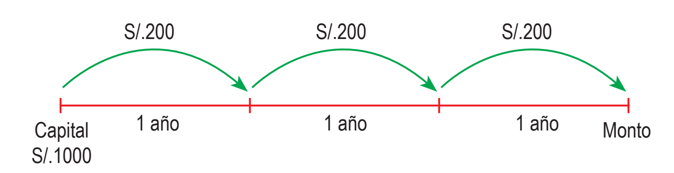
El interés puede ser simple o compuesto.

Interés simple

Es cuando la ganancia que origina un capital no se acumula al capital.

Ejemplo:
Se desea saber cuánto se recibe al prestar S/.1000 al 20% anual durante 3 años.

Resolución:
Dato: C = S/.1000;   r% = 20%; t = 3 años
Piden: M = ?



Interés generado en un año: 20% . 1000 . 1 = S/.200
Interés generado en dos años: 20% . 1000 . 2 = S/.400
Interés generado en tres años: 20% . 1000 . 3 = S/.600

Luego:
I = S/.600
M = S/.1000 + S/.600 = S/.1600

Fórmula para calcular el interés simple

$$I = C \times r\% \times t \Rightarrow I = \frac{C \times r \times t}{100}$$

Además: $$M = C + I \Rightarrow M = C(1 + r\%\ t)$$

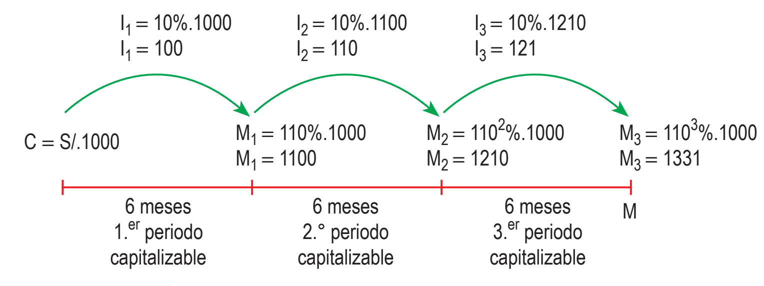
Interés compuesto

Es cuando los intereses no se retiran sino se van acumulando al capital inicial formando nuevos capitales para volver a producir interés.

Ejemplo:
Calcula el interés que producirá un capital de S/.1000 en 18 meses al 20% anual capitalizable semestralmente.

Resolución:
Datos:
C = S/.1000
t = 18 meses < > 3 semestres
r% = 20% anual < > 10% semestral

Debido a que es capitalizable semestralmente



En general: $M = C\,.\,(1 + r\%)^n$

Donde:
n es el número de periodos contenidos en el tiempo de imposición.

En el ejemplo:

$$M = 1000(1 + 10\%)^3 = 1000(1 + 0{,}1)^3$$
$$M = 1331$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

Halla el interés producido por S/.5000 impuesto durante 7 meses al 5% anual.

Resolución:
Pide: I = ?
Datos: C = S/.5000; t = 7; r = 5

$$I = \frac{C \times r \times t}{1200} = \frac{5000 \times 5 \times 7}{1200} \Rightarrow I = S/.145{,}83$$

Un capital estuvo impuesto al 9% de interés anual y después de 4 años se obtuvo un monto de S/.10 200. ¿Cuál fue el valor del capital?

Resolución:
Sea C el capital, r% = 9% y t = 4 años.
M = 10 200
M = C + I = 10 200

Reemplazamos:

$$C + \frac{C \times 9 \times 4}{100} = 10\,200$$

$$\frac{136}{100}\,C = 10\,200 \Rightarrow C = S/.7500$$

¿Cuál es el monto producido por un capital de S/.3600 colocados al 8% anual durante 2 años y 6 meses?

Resolución:
Piden: Monto (M)
Datos: r% = 8%, t = 30 meses y C = 3600

Sabemos que: $M = C + I$ ... (1)

Pero:
$I = C \times r\% \times t$
$I = 3600 \times \frac{8\%}{12} \times 30$
$I = 720$ ... (2)

Reemplazamos (2) en (1):
$M = 3600 + 720 \Rightarrow M = S/.4320$

Recuerda

La fórmula para determinar el interés que produce un capital (C) impuesto al r% anual depende del tiempo.

- Si el tiempo es en meses: $I = \frac{C.r.t}{1200}$
- Si el tiempo es en días: $I = \frac{C.r.t}{36\,000}$

Observación

- Equivalencias comerciales de tiempo:
  1 mes comercial < > 30 días
  1 año comercial < > 360 días
  1 año común < > 365 días
  1 año bisiesto < > 366 días
- Cuando no se menciona qué tipo de interés se está empleando, se asume que es un interés simple.

Atención

Existe una herramienta llamada regla del 72, que se dice fue descubierta por Albert Einstein, y que se usa en el interés compuesto para aproximar el número de años en que un capital inicial duplica su valor. Se estima el número de años para que una inversión se duplique dividiendo 72 entre el interés anual. Por ejemplo, si se desea saber en cuántos años duplicaré mi capital de S/.10 000 a un interés compuesto de 3,6% anual, entonces divido $\frac{72}{3{,}6}$ = 20 años, que es el tiempo en que mi inversión duplicará su valor a 20 000.

Problemas resueltos

1 Un capital impuesto al 3,5% semestral, al cabo de 17 días se ha convertido en una suma de 3611,90 soles. Calcula dicho capital.

Resolución:

C = ? r = 3,5% semestral
t = 17 días r = 7% anual

$\Rightarrow \quad M = C + I$

$3611{,}9 = C + \dfrac{C \times 7 \times 17}{36\ 000} \Rightarrow C = S/.3600$

2 Carlos impone los 4/7 de su capital al 4% y el resto al 5%, resultando un interés anual de S/.4650. Calcula cuál es la suma impuesta al 4%.

Resolución:

Sea C el capital.

1.° Coloca 4/7 de C al 4%

$I_1 = \dfrac{4C \times 4 \times 1}{7 \times 100} = \dfrac{16}{700}C$

2.° Coloca 3/7 de C al 5%

$I_2 = \dfrac{3C \times 5 \times 1}{7 \times 100} = \dfrac{15}{700}C$

Por dato:

$I_1 + I_2 = 4650$

$\dfrac{31C}{700} = 4650$

$C = 105\ 000$

Al 4% se colocó:

$\dfrac{4}{7} \times 105\ 000 = S/.60\ 000$

3 Halla el capital que impuesto al 12% trimestral ha producido en 5 meses 1770 soles menos que si el capital fuera impuesto al 18% cuatrimestral durante 160 días.

Resolución:

I_1: interés producido al 12% trimestral
I_2: interés producido al 18% cuatrimestral
C: capital
Del dato: $I_1 = I_2 - 1770$

$\dfrac{C \times r_1 \times t_1}{100} = \dfrac{C \times r_2 \times t_2}{100} - 1700 \quad ...(1)$

Asimismo, las tasas deben ser anuales:
r_1:12% trimestral <> 48% anual
r_2: 18% cuatrimestral <> 54% anual

Reemplazamos en (1)

$\dfrac{C \times 48 \times 5}{100(12)} = \dfrac{C \times 54 \times 160}{100(360)} - 1770$

$\dfrac{C}{5} = \dfrac{6C}{25} - 1770$

$1770 = \dfrac{C}{25} \Rightarrow C = S/.44\ 250$

4 Un capital está impuesto al 30% anual y un segundo capital al 50%. La suma de dichos capitales es 28 000 soles. Si el interés anual que produce el primero es al interés cuatrianual que produce el segundo como 5 es a 4. Halla el capital menor.

Resolución:

$C_1 + C_2 = 28\ 000 \quad ...(1)$

Del enunciado: $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{C_1 \times 1 \times 30}{100}}{\dfrac{C_2 \times 4 \times 50}{100}} = \dfrac{5}{4}$

Reduciendo: $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{25}{3} \quad ...(2)$

De (1) y (2): $C_1 = S/.25\ 000$ y $C_2 = S/.3000$
Entonces, el capital menor es de S/.3000.

5 Tres capitales se prestan a la misma tasa por 2 años, luego de los cuales se convierten en S/.2160; S/.1440 y S/.1200. ¿Cuánto tiempo hubiera pasado para que la relación entre los montos generados por el mayor y el menor capital, colocados al 6% y 3% respectivamente, estén de 234 a 115?

Resolución:

Del enunciado:
$2160 = C_1(1 + r\% \, . \, 2)$
$1440 = C_2(1 + r\% \, . \, 2)$
$1200 = C_3(1 + r\% \, . \, 2) \quad \Rightarrow \dfrac{C_1}{216} = \dfrac{C_2}{144} = \dfrac{C_3}{120} = k$

Además: $\dfrac{M_1}{234} = \dfrac{M_3}{115}$

$115\left[216k\left(1 + \dfrac{6.t}{100}\right)\right] = 234\left[120k\left(1 + \dfrac{3.t}{100}\right)\right]$

$23\left(1 + \dfrac{6t}{100}\right) = 26\left(1 + \dfrac{3t}{100}\right) \Rightarrow \dfrac{60t}{100} = 3 \quad \Rightarrow t = 5 \text{ años}$

6 Se presta la suma de S/.87 600 durante 15 meses al 5% trimestral. Halla el margen de error que se comete en el cálculo del beneficio al tomar el año común en vez del año comercial.

Resolución:

15 meses < > 450 días
5% trimestral < > 20% anual
Tomando como año comercial:

$I_1 = 87\ 600\left(\dfrac{20\%}{360}\right)450$

$I_1 = S/.21\ 900$

Tomando como año común:

$I_2 = 87\ 600\left(\dfrac{20\%}{365}\right)450$

$I_1 = S/.21\ 600$

Piden el margen de error:
$I_1 - I_2 = S/.300$

7 ¿Cuánto dinero debe pagarse a un banco que hizo un préstamo de \$300 000 si se reembolsa al año capital e interés y la tasa aplicada es de 0,24 anual capitalizable trimestralmente?

Resolución:

Datos:
C = \$300 000
Tasa de interés =0,24 = 24% anual
Plazo = 1 año
Período de capitalización = trimestral
Frecuencia de capitalización = 4 (1 año <> 4 trimestres)

$\Rightarrow \dfrac{24\% \text{ anual}}{4} = 6\% \text{ trimestral}$

Se debe cancelar la deuda en un año, que es 4 trimestres:
$M = C \, . \, (1 + r\%)^n = 300\ 000(1 + 0{,}06)^4$
M = \$378 743,09 será el monto que se debe pagar al banco.

A

DEFINICIÓN

La estadística es la ciencia cuyo objetivo es reunir, organizar, presentar, analizar e interpretar datos concernientes a individuos, grupos, serie de hechos, etc., con el fin de obtener conclusiones y tomar decisiones sobre determinados hechos o fenómenos en estudio.

CONCEPTOS BÁSICOS

Población	Muestra	Variable
Es el conjunto sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones.	Es un subconjunto de la población sobre el que realmente hacemos las observaciones.	Es una característica observable que varía entre los individuos de una población.

Veamos dos ejemplos:

- **Población:** alumnos de un colegio.
  Muestra: un grupo de alumnos.
  Variable: nota, altura, etc.
- **Población:** ancianos enfermos.
  Muestra: un grupo de ancianos enfermos.
  Variable: enfermedad.

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

Recopilación de datos	Organización de datos	Presentación de datos
Los métodos de recopilación de datos son muy diversos y dependen de las posibilidades de acceso con los elementos a investigar, del tamaño de la muestra, etc. Ejemplo: Se tienen los ahorros de 20 personas elegidas al azar. 470 500 490 300 80 250 270 300 600 120 250 450 450 460 380 370 380 450 0 400	Después de la recopilación de datos se procede a su organización, clasificación y tabulación de modo que facilite su representación en tablas, cuadros, etc. Del ejemplo: 0 80 120 250 250 270 300 300 370 380 380 400 450 450 450 460 470 490 500 600	Dicha representación se realiza principalmente a través de tablas o gráficos.

ELEMENTOS DE UNA TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

- **Alcance (A)**
  Es el intervalo cerrado que considera como límites al menor y mayor de los datos.

  En el ejemplo:

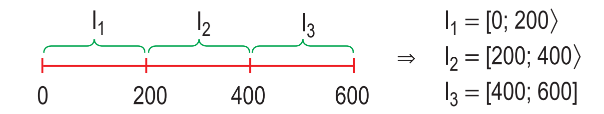
  A = [0; 600]

- **Rango (R)**
  Es la amplitud del alcance. Se calcula como la diferencia del mayor y menor de los datos.

  En el ejemplo:
  R = 600 – 0
  R = 600

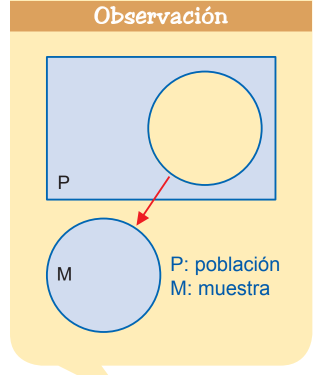
- **Intervalo de clase (I_i):** es una partición del alcance, el cual se obtiene, considerando un subconjunto adecuado del alcance.

En el ejemplo, podemos considerar los siguientes intervalos:



$\Rightarrow$ $I_1 = [0; 200\rangle$
$I_2 = [200; 400\rangle$
$I_3 = [400; 600]$

Observación



Recuerda

La variable puede ser:
- Altura:
  1,82 m; 1,52 m; 1,38 m...
- Estado civil:
  Casado, soltero, divorciado, etc.
- Peso:
  20 kg; 40 kg; 60 kg; ...
- Sexo:
  Masculino; femenino.

Nota

Los métodos más utilizados en la recopilación de datos son los censos y las encuestas.

Atención

Histograma:

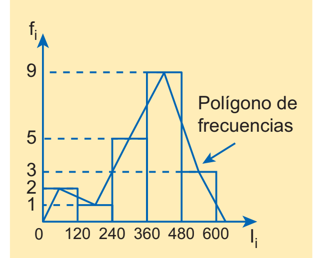


Diagrama escalonado:

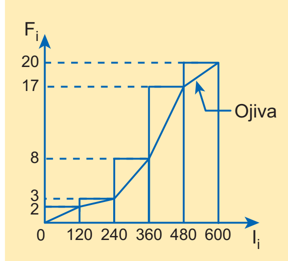
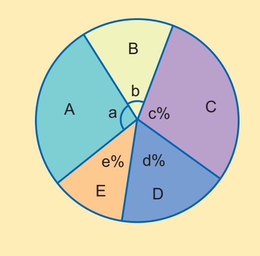


Diagrama circular:



- **Ancho de clase (w_i):** es el tamaño de un intervalo determinado.

  En el ejemplo:

  $I_1 = [0; 200\rangle \Rightarrow w_1 = 200 - 0$, $w_1 = 200$

  $I_2 = [200; 400\rangle \Rightarrow w_2 = 400 - 200$, $w_2 = 200$

- **Marca de clase (x_i):** es el promedio de los datos en un intervalo.

  En $I_1 = [0; 200\rangle$

  $x_1 = \dfrac{0 + 200}{2} = 100$

  En $I_2 = [200; 400\rangle$

  $x_2 = \dfrac{200 + 400}{2} = 300$

Número de intervalos (k)

Los datos se pueden clasificar en cierta cantidad de intervalos de clase. La **regla de Sturges** permite obtener el número de intervalos convenientes, de igual ancho de clase, en los que se deben clasificar, dependiendo del número de datos (N).

$$k = 1 + 3{,}3\log(N)$$

En el ejemplo:
$N = 20 \Rightarrow k = 1 + 3{,}3\log(20) = 5{,}294...$
↳ k aproximado puede ser 4; 5 ó 6. En el ejemplo, se va a elegir (k = 5).

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$100h_i\%$	$100H_i\%$	x_if_i
$[0; 120\rangle$	60	2	2	0,10	0,10	10%	10%	120
$[120; 240\rangle$	180	1	3	0,05	0,15	5%	15%	180
$[240; 360\rangle$	300	5	8	0,25	0,40	25%	40%	1500
$[360; 480\rangle$	420	9	17	0,45	0,85	45%	85%	3780
$[480; 600]$	540	3	20	0,15	1	15%	100%	1620
Total		**20**		**1**		**100%**		**7200**

Donde:

f_i: es la frecuencia absoluta de la clase i e indica la cantidad de datos que hay en un intervalo de clase determinado.

F_i: frecuencia absoluta acumulada de la clase i.

h_i: frecuencia relativa de la clase i.

H_i: frecuencia relativa acumulada de la clase i.

Además: $f_i \geq 0$; $F_i \geq 0 \ \wedge \ 0 \leq h_i \leq 1$

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media aritmética ($\overline{x}$)

a) Para datos no clasificados.
Sean los datos: $d_1; d_2; d_3; ...; d_n$

$$\overline{x} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{N}$$

Ejemplo:

7; 20; 30; 100; 12; 18; 100; 18; 100

$\overline{x} = \dfrac{7 + 20 + 30 + 100 + ... + 18 + 100}{9}$

$\overline{x} = \dfrac{405}{9} \Rightarrow \overline{x} = 45$

b) Para datos clasificados.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$$

Del cuadro anterior:

$\overline{x} = \dfrac{120 + 180 + 1500 + 3780 + 1620}{20}$

$\overline{x} = \dfrac{7200}{20} \Rightarrow \overline{x} = 360$

Nota

- $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = N$
- $F_1 = f_1 \ \wedge \ F_k = N$
  $F_i = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_i$
- $h_i = \dfrac{f_i}{N}$
  $h_1 + h_2 + h_3 + ... + h_k = \sum_{i=1}^{k} h_i = 1$
- $H_i = \dfrac{F_i}{N}$
  $H_1 = h_1 \ \wedge \ H_k = 1$

Mediana (Me)

a) Para datos no clasificados.

Ejemplo:
Ordenando crecientemente los datos anteriores.

7; 12; 18; 18; (20); 30; 100; 100; 100

↳ dato central

Entonces: Me = 20

b) Para datos clasificados.

$$Me = L_m + w_m\left[\frac{\frac{N}{2} - F_{m-1}}{f_m}\right]$$

Donde:

L_m: límite inferior de la clase mediana.

w_m: ancho de la clase mediana.

F_{m-1}: frecuencia absoluta acumulada de la clase que precede a la clase mediana

f_m: frecuencia absoluta de la clase mediana.

Atención

La clase mediana es aquella cuya frecuencia absoluta acumulada sea igual a la mitad de los datos o mayor a la mitad de datos por primera vez.

Del cuadro anterior:

$Me = 360 + 120\left[\frac{\frac{20}{2} - 8}{9}\right]$

$Me = 386{,}6$

Moda (Mo)

a) Para datos no clasificados.

Ejemplo:

De los datos anteriores:

7; 20; 30; (100); 12; 18; (100); 18; (100)

Entonces: Mo = 100, pues es el valor de los datos que se repite con mayor frecuencia.

b) Para datos clasificados.

$$Mo = L_o + W_o\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

Donde:

L_o: límite inferior de la clase modal.

w_o: ancho de la clase modal.

d_1: diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente.

d_2: diferencia entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Varianza (σ^2)

a) Para datos no clasificados.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

b) Para datos clasificados.

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

Observación

Para ubicar la clase modal, se busca el intervalo de clase con la mayor frecuencia absoluta.

Del cuadro anterior:

$Mo = 360 + 120\left(\frac{4}{4+6}\right)$

$Mo = 408$

Mediana en un conjunto de datos ordenados

En un conjunto de datos ordenados de menor a mayor, la mediana corresponde al dato central, que es aquel que deja un 50% de la información bajó él y el otro 50% es mayor o igual.

Si: $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, ..., x_{(n)}$ es la muestra.

$$Me = \begin{cases} \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, \text{ si n es par} \\ x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ si n es impar} \end{cases}$$

Problemas resueltos

1 Dado el conjunto de valores:

$A = \{1; 2; 1; 3; 1; 4; 5; 1; 2; 5\}$

Calcula la suma de la moda y la mediana de los valores.

Resolución:

Ordenando los valores:

$A = \{1; 1; 1; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 5\}$
↓
Me

$1 \rightarrow 4$ veces $\Rightarrow Mo = 1$ $\quad 2 \rightarrow 2$ veces

$3 \rightarrow 1$ vez $\quad 5 \rightarrow 2$ veces

$\therefore Mo + Me = 3$

2 En el siguiente cuadro se muestra la distribución de edades de un cierto número de personas.

Calcula: $x + y + z$

I_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	80			
[30; 40⟩	40	0,25		z
[40; 50⟩		0,15	y	
[50; 60]	x			

Resolución:

Intervalos	f_i	h_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	80	0,5	80	0,5
[30; 40⟩	40	0,25	120	z
[40; 50⟩	a	0,15	y	
[50; 60]	x			

n.° personas = N

$\Rightarrow h_2 = 0{,}25 = \frac{40}{N} \Rightarrow N = 160$ personas

$\Rightarrow h_3 = \frac{f_3}{N} \Rightarrow 0{,}15 = \frac{a}{160}$

$\Rightarrow a = 24$

- $x + a + 40 + 80 = 160$
  $x + 24 + 120 = 160$
  $\Rightarrow x = 16$

- $h_1 = \frac{80}{160} = 0{,}5$
  $y = 120 + a \Rightarrow y = 144$
  $z = 0{,}5 + 0{,}25 \Rightarrow z = 0{,}75$

$\therefore x + y + z = 160{,}75$

3 En un salón, las notas de 8 alumnos fueron:

7; 7; 9; 9; 12; 13; 13; 14

Halla la varianza.

Resolución:

Hallamos la media:

$$\bar{x} = \frac{7 + 7 + 9 + 9 + 12 + 13 + 13 + 14}{8} = 10{,}5$$

Hallamos la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{8}(938) - (10{,}5)^2$$

$\therefore \sigma^2 = 7$

4 De los 5 intervalos de clase de una distribución de frecuencias se tiene:

$h_1 = \frac{k-3}{4k};\ h_2 = \frac{10-k}{4k};\ h_3 = \frac{k-2}{4k}$

$h_4 = \frac{k+1}{4k};\ h_5 = \frac{k-1}{4k}$

Calcula el tamaño de la muestra.

Resolución:

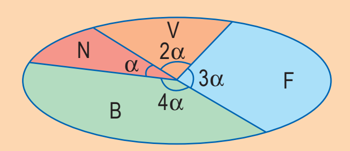
Por la propiedad de las frecuencias relativas:

$$\frac{k-3}{4k} + \frac{10-k}{4k} + \frac{k-2}{4k} + \frac{k+1}{4k} + \frac{k-1}{4k} = 1$$

$$\frac{5+3k}{4k} = 1 \Rightarrow k = 5$$

$\therefore N = 4k = 4 \times 5 = 20$

5 El siguiente gráfico muestra la preferencia de un salón de 30 alumnos por los siguientes deportes: baloncesto(B), fútbol(F), natación(N) y vóley(V).



¿Cuántos alumnos practican natación?

Resolución:

Sea n la cantidad de alumnos que practican natación.

Del gráfico:

$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360° \Rightarrow 10\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 36°$

Luego:

$$\alpha = \frac{360°}{(30)} \times n \Rightarrow 36° = \frac{360°}{30} \times n$$

$$n = \frac{36° \times 30}{360°} = 3$$

Por lo tanto, 3 alumnos practican natación.

6 Dado el siguiente cuadro, determina la mediana.

I_i	f_i	F_i
[20; 30⟩	2	2
[30; 40⟩	4	6
[40; 50⟩	5	11
[50; 60⟩	6	17
[60; 70]	3	20

Resolución:

Determinamos primero el intervalo de la clase mediana.

Intervalo de la clase mediana → [40; 50⟩

I_i	f_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	2	2	0,10
[30; 40⟩	4	6	0,30
[40; 50⟩	5	11	0,55
[50; 60⟩	6	17	0,85
[60; 70]	3	20	1,00
	N = 20		

$Me = L_m + w_m\left[\dfrac{\frac{N}{2} - F_{(m-1)}}{f_m}\right]$ $\qquad$ $Me = 40 + 10\left[\dfrac{\frac{20}{2} - 6}{5}\right]$

$Me = 40 + 8 \Rightarrow Me = 48$

7 Dado el siguiente cuadro, determina la moda.

I_i	f_i
[0; 40⟩	6
[40; 80⟩	5
[80; 120⟩	4
[120; 160⟩	9
[160; 200]	6

Resolución:

Sabemos:

$Mo = L_o + w_o\left[\dfrac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$

Se presenta la mayor cantidad de datos en la 4.ª fila ($f_4 = 9$):

$d_1 = f_4 - f_3 \quad \wedge \quad d_2 = f_4 - f_5$

$d_1 = 9 - 4 = 5 \qquad d_2 = 9 - 6 = 3$

$Mo = 120 + 40\left[\dfrac{5}{5 + 3}\right]$

$Mo = 120 + 25 \Rightarrow Mo = 145$

8 En un cuadro de distribución de 4 intervalos de igual ancho de clase se sabe que: $x_1 = 12$, $x_3 = 28$, $f_2 = 45$, $h_1 = h_3 = 0,25$. Si en total hay 120 datos. Calcula su media.

Resolución:

x_i	f_i	h_i
12	a = 30	0,25
d = 20	45	0,375
28	b = 30	0,25
e = 36	c = 15	0,125
Total	120	1

$h_2 = \dfrac{45}{120} = 0,375 \qquad h_4 = 0,125$

$\dfrac{a}{n} = h_1 \Rightarrow \dfrac{a}{120} = 0,25 \Rightarrow a = 30$

$\dfrac{b}{120} \Rightarrow b = 30 \qquad \dfrac{c}{120} = 0,125 \Rightarrow c = 15$

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{n} = \dfrac{12 \times 30 + 20 \times 45 + 28 \times 30 + 36 \times 15}{120}$

$\therefore \bar{x} = 22$

9 Si el siguiente cuadro de distribución es simétrico.

I_i	f_i	F_i	h_i
[20; ⟩	12	a	0, 20
[; 36⟩		20	
[; ⟩			
[; ⟩			
[;]		60	

Calcula la moda.

Resolución:

I_i	f_i	F_i	h_i
[20; 28⟩	12	a = 12	0,2
[28; 36⟩	8	20	
[36; 44⟩	20	40	
[44; 52⟩	8	48	
[52; 60]	12	60	0,2

$w = 8$

$Mo = 36 + 8\left(\dfrac{12}{12 + 12}\right)$

$\therefore Mo = 40$

TEORÍA COMBINATORIA

DEFINICIÓN

La teoría combinatoria estudia las diferentes formas en que se puede contar u ordenar los elementos de un conjunto.

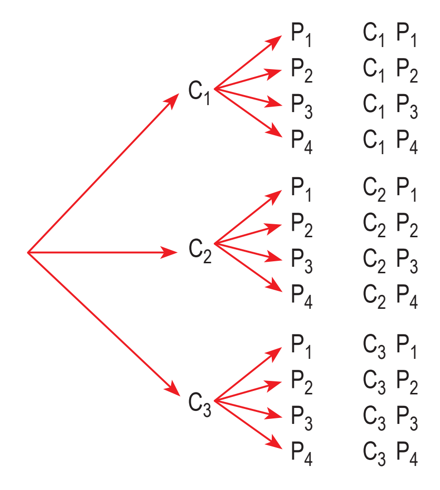
TÉCNICAS DE CONTEO

El análisis combinatorio aporta unas técnicas llamadas de conteo, que son las operaciones que permiten determinar la cantidad de formas en que se pueden disponer los elementos de un conjunto, bajo condiciones particulares de ordenamiento.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Es un procedimiento gráfico que ilustra las formas en las que se llevan a cabo las agrupaciones de elementos.

Ejemplo:
Un equipo de vóley tiene que elegir un uniforme, para ello debe escoger entre 3 camisetas y 4 pantalonetas de diferentes colores. ¿Cuántos uniformes distintos se pueden componer con las camisetas y pantalonetas disponibles?
Sea C la camiseta y P la pantaloneta:



Cada columna representa las posibles respuestas. Si seguimos los caminos formados podemos apreciar que existen 12 formas diferentes de comparar dicho uniforme:

$U = \{C_1P_1; C_1P_2; C_1P_3; C_1P_4; C_2P_1; C_2P_2; C_2P_3; C_2P_4; C_3P_1; C_3P_2; C_3P_3; C_3P_4\}$

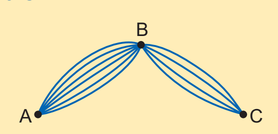
Recuerda

Solo el diagrama de árbol nos permite **visualizar** todas las posibilidades, pero cuando se tienen muchas posibilidades es muy complicado usar el diagrama de árbol y debemos recurrir a las otras técnicas de conteo.

Ahora desarrollaremos técnicas de conteo en las que no apreciamos gráficamente todas las posibilidades.

Observación

Se tiene el siguiente sistema de caminos. Calcularemos el número de formas de ir de A a C.



De A a B hay 6 posibles caminos, de B a C hay 4 posibles caminos. En total hay $6 \times 4 = 24$ formas de ir de A a C.

PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un evento puede ocurrir de m maneras distintas y un segundo evento puede ocurrir indepedientemente del primero de k maneras distintas, entonces el número total de formas diferentes en que pueden ocurrir simultáneamente es igual a $m \times k$.

Ejemplo:
Resolvamos el ejemplo anterior sin usar el diagrama de árbol y usando el principio de multiplicación:
Debemos de tener en cuenta que cada una de las camisetas se podría combinar con cada una de las pantalonetas disponibles. Si tuviéramos una única camiseta podríamos componer 4 uniformes diferentes, tendríamos por lo tanto $1 \times 4 = 4$ combinaciones posibles. Si tuviéramos dos camisetas, podríamos componer $2 \times 4 = 8$ combinaciones posibles. Siguiendo el mismo razonamiento, llegamos a la conclusión que con 3 camisetas y 4 pantalonetas podríamos componer $3 \times 4 = 12$ uniformes diferentes. Hemos realizado el cálculo directamente sin necesidad de conocer cuales son los ordenamientos posibles.

PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si una situación puede ocurrir de "m" maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de "k" maneras, entonces existen "$m + k$" maneras en las que puede ocurrir la primera o la segunda situación.

Ejemplo:
Se puede viajar de la ciudad A a B por vía aérea, usando 2 líneas de transporte, o por vía terrestre a través de 3 líneas posibles. ¿De cuántas formas se puede ir de A a B?
En este caso las situaciones no se pueden realizar de manera simultánea, por lo que sería erróneo usar la multiplicación. Estas situaciones son excluyentes entre sí, es decir, se realiza una o la otra, se viaja por avión o por auto, entonces se puede ir de A a B de $2 + 3 = 5$ formas posibles.

VARIACIONES CON REPETICIÓN

Utilizando los m elementos de un conjunto C, queremos formar sucesiones de longitud n, permitiendo que los elementos se repitan y queremos contar el número de maneras de hacer esto. El resultado es m^n.

Ejemplo:
Si lanzamos un dado cinco veces, ¿cuántos resultados posibles hay?
Para cada lanzamiento hay seis resultados posibles. Como lanzamos el dado cinco veces el resultado es $6^5 = 7776$ resultados posibles.
Si queremos usar el esquema conceptual, tenemos: $C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $m = 6$ y $n = 5$

VARIACIONES SIN REPETICIÓN

Es un ordenamiento específico de n elementos de un conjunto C de m elementos. Facilita el recuento de las ordenaciones diferentes que pueden hacerse con los elementos del conjunto. En una variación el orden en que se disponen los elementos del conjunto es importante. La variación de un conjunto de m elementos tomados, de n en n se denota:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplo:
Se colocan veinte tarjetas numeradas de 1 a 20 en una bolsa para rifar tres premios ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios?
A un premio no le puede corresponder más de un número, es decir, queremos todos los ordenamientos posibles, sin elementos repetidos, de tamaño 3 de un total de 20: $V_3^{20} = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$

También pudimos directamente decir: al primer premio le corresponde 20 posibilidades. Seleccionado este, al segundo le queda 19 posibilidades y al tercero 18. En total hay $20 \times 19 \times 18 = 6840$ maneras.

PERMUTACIONES

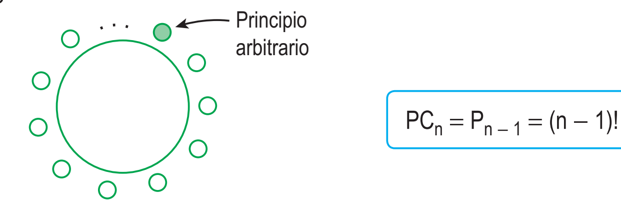
Son un caso particular de las variaciones, que corresponden a la situación $m = n$.
En este caso $V_m^m = m!$. Observamos que ahora los ordenamientos contendrán a todos los elementos del conjunto analizado, sin repetición, dispuestos en todas las órdenes posibles.
Dado un conjunto $C = \{C_1; C_2; C_3\}$, esto es $m = 3$. Las permutaciones serían:
$(C_1; C_2; C_3)$; $(C_1; C_3; C_2)$; $(C_2; C_1; C_3)$; $(C_2; C_3; C_1)$; $(C_3; C_1; C_2)$; $(C_3; C_2; C_1)$.
Claramente $V_m^m = 6$, también se emplea: $V_m^m = P_m$.

Ejemplo:
¿Cuántas palabras, con o sin sentido, pueden obtenerse usando todas las letras de la palabra PRENSA?
Como la palabra no tiene letras repetidas, necesitamos todos los ordenamientos posibles con todos los elementos sin repetirlos, esto es: $6! = 720$

Permutaciones circulares

Cuando ordenamos los elementos en forma de círculo (por ejemplo, los comensales en una mesa circular), de modo que el primer elemento que se sitúe en la muestra, determina el principio y el final de la muestra.

Principio arbitrario



$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Ejemplo:
¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
$PC_8 = P_{8-1} = (8-1)! = 7! = 5040$ formas

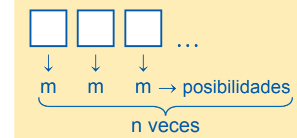
COMBINACIONES

Una combinación es un subconjunto o una disposición de todos los elementos de un conjunto, sin tener en cuenta el orden de ellos. El número de combinaciones o subconjuntos no ordenados, cada uno formado por n elementos que pueden obtenerse de un conjunto de m elementos, se calcula:

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! \times n!}$$

Atención

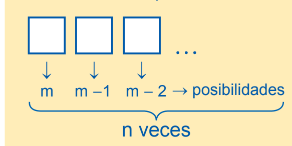
Una forma práctica de entender las variaciones con repetición es el análisis gráfico:



En la primera posición tenemos m posibilidades, las mismas m posibilidades se dan en las demás posiciones, por el principio de multiplicación tenemos en total m^n posibilidades.

Atención

De forma recíproca a la anterior podemos analizar las variaciones sin repetición.



Por principio de multiplicación:
$m \times m - 1 \times m - 2 \times \ldots \times (m - n + 1) = \frac{m!}{(m-n)!}$

Atención

En una combinación se calcula el número de formas en que puedes escoger un subconjunto. Si permutamos los elementos de este subconjunto, tendremos un subconjunto ordenado, es decir, una variación. Esta relación se expresa:

$$C_n^m \times P_n = V_n^m$$

Ejemplo:

De un grupo de veinticinco libros queremos escoger tres para leer durante las vacaciones. ¿De cuántas maneras podemos hacer esto?

Como no nos importa el orden en que se escogerán, la respuesta es: $C_3^{25} = \dfrac{25!}{22! \times 3!} = 2300$

RECURSIVIDAD

Recursividad, recursión o recurrencia es un concepto matemático que nos permite definir funciones, conjuntos, sucesiones, etc. en función de ellas mismas.
Se habla de un proceso recursivo cuando:

1. Existe por lo menos un caso base, no recursivo, para el cual se resuelve el proceso.
2. Existe una regla de construcción con la cual se puede definir el resto de casos del proceso, basado en casos anteriores.

Ejemplo:

La función factorial está definida como $f(n) = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$; para $n > 0$ y $f(n) = 1$ cuando $n = 0$. Halla su definición recursiva.

Hallamos la regla de construcción:

$$n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1}_{(n-1)!}$$

$$n! = n \times (n-1)! = n \times f(n-1)$$

Entonces, la función factorial queda definida recursivamente como:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n \times f(n-1), & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Observación

El conjunto de las potencias de 2: $P = \{1; 2; 4; 8; ...; 2^n\}$ se puede expresar como $a_n = 2^n$.

En forma recursiva será:
Como $a_0 = 1$, entonces

$a_1 = 1 \times 2 = 2$
$a_2 = 2 \times 2 = 4$
$a_3 = 4 \times 2 = 8$

Por lo tanto: $a_n = 2 \times a_{n-1}$

La función se define recursivamente:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 2a_{n-1}, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Nota

Una función recursiva tendrá tantos casos base como el número de llamadas que usa en su definición.

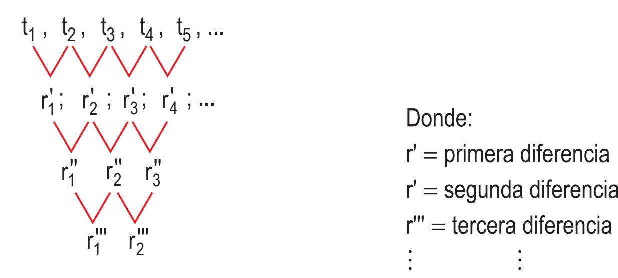
Ejemplo:
La función fibonacci se define:
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

Como hace 2 llamadas tendrá 2 casos base:
$f(0) = 1, f(1) = 1$

DIFERENCIAS FINITAS

Usando las diferencias finitas estudiaremos un método para calcular el término enésimo de una sucesión. Para esto formaremos un polinomio, según el siguiente procedimiento:

Sea la sucesión



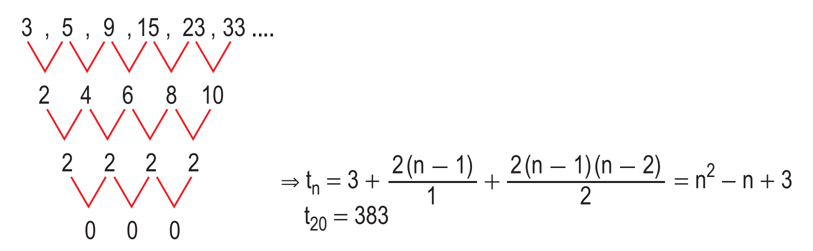
El polinomio al que llamaremos t_n, queda formado:

$$t_n = t_1 + r'_1\frac{(n-1)}{1!} + r''_1\frac{(n-1)(n-2)}{2!} + r'''_1\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} + ...$$

Ejemplo:

Halla el término 20 de la sucesión: 3, 5, 9, 15, 23, 33 ....

Resolución
Hallamos las diferencias hasta que sean cero



$$\Rightarrow t_n = 3 + \frac{2(n-1)}{1} + \frac{2(n-1)(n-2)}{2} = n^2 - n + 3$$
$$t_{20} = 383$$

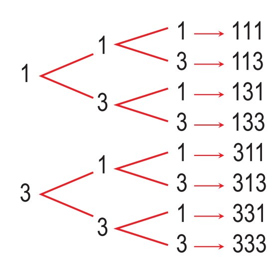
Recuerda

Para poder formar el polinomio debes encontrar el fin de las diferencias, es decir, cuando las diferencias sean cero.

Problemas resueltos

1 Usa el diagrama de árbol y halla todos los números de tres cifras que se pueden formar con 1 y 3.

Resolución:

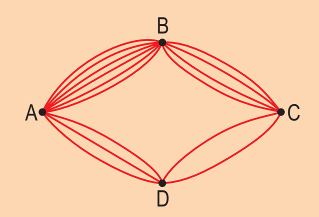


∴ Se pueden formar 8 números.

2 En una tienda hay cinco modelos de camisa y tres de pantalón. ¿Cuántos conjuntos distintos de pantalón y camisa podemos comprar?

Resolución:
La camisa la podemos elegir de cinco maneras distintas. Para cada una de ellas podemos escoger el pantalón de tres maneras distintas. Por lo tanto, hay $5 \times 3 = 15$ maneras de escoger un pantalón y una camisa.

3 Tenemos cuatro ciudades: A, B, C y D; comunicadas por un sistema de carreteras como muestra la figura. ¿De cuántas maneras se puede ir de A hasta C?



Resolución:
Podemos ir de A a C pasando por B o por D. Si elegimos ir por B, habría $6 \times 4 = 24$ maneras de llegar a C. Si elegimos ir por D, habría $3 \times 2 = 6$ maneras de llegar a C. Por lo tanto en total hay $24 + 6 = 30$ maneras de viajar de A hasta C.

4 ¿Cuántas palabras de tres letras (con o sin sentido) pueden formarse con las letras de la palabra AZUL?

Resolución:
Para cada una de las letras de la palabra que queremos formar tenemos cuatro que podemos escoger.
Por lo tanto hay $4^3 = 64$ palabras.

5 El garaje de Ángel tiene cinco plazas. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres coches; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el coche en el lugar que prefieren, si no está ocupado. Este es el esquema de la cochera:

1	2	3	4	5

¿De cuántas maneras posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus coches en la cochera?

Resolución:
Necesitamos ordenamientos específicos de 3 en 3 del total de 5 espacios en la cochera, es decir:

$V_3^5 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ formas de estacionar los coches.

6 Un niño tiene doce cartas, nueve de ellas son los números 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9. Las tres restantes son las figuras: sota, caballo y rey. ¿De cuántas maneras se pueden alinear cuatro de las doce cartas, con la condición que siempre estén las tres figuras?

Resolución:
Cuatro cartas diferentes se pueden alinear de $V_4^4 = 4!$ formas, esto para cada una de las 9 cartas que pueden acompañar a las figuras. Por lo tanto, tenemos $9 \times 4! = 216$ maneras.

7 Una maestra tiene que elegir tres estudiantes para borrar la pizarra. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, Germán, Jorge y María. ¿De cuántas maneras puede elegir tres de estos alumnos?

Resolución:
Se debe elegir tres elementos de un conjunto de cinco, sin importar el orden de elección, esto es:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

∴ Hay 10 maneras de elegir a los tres alumnos.

8 Tenemos la siguiente ecuación recurrente:
$a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1$. Halla su forma explícita.

Resolución:

$$a_n = a_{n-1} + 2^n$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + 2^{n-1}$$
$$a_{n-2} = a_{n-3} + 2^{n-2}$$
$$a_{n-3} = a_{n-4} + 2^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$a_1 = a_0 + 2^1$$
$$a_n = a_0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} + 2^n$$
$$a_n = 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n$$
$$a_n = \sum_{i=0}^{i=n} 2^i$$

Atención

1. El complemento de un evento A con respecto a Ω, es el subconjunto de todos los elementos de Ω que no están en A. Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A^C.
2. La intersección de dos eventos A y B, denotada mediante el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos comunes a A y a B.
3. Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \varnothing$; es decir, si A y B no tienen elementos en común.
4. La unión de dos eventos A y B que se nota mediante el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

Observación

Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A, entonces la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

La teoría de la probabilidad se inició prácticamente con el análisis matemático de los juegos de azar, realizada primero por los matemáticos Blas Pascal (1623 - 1662) y Pierre du Fermat (1601 - 1665). Aportaron también Jacobo Bernoulli (1654 - 1705) y Pierre Simon Laplace (1749 - 1827); y fue en 1933 que el matemático Kolmogórov estableció una presentación axiomática que constituye la base de la teoría moderna de probabilidades.

ESPACIO MUESTRAL

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y lo representamos con el símbolo Ω.
Cada resultado posible en un espacio muestral se llama elemento, miembro o punto muestral.

Ejemplo:
Consideremos el experimento de lanzar un dado. Si queremos observar el número que nos da, el espacio muestral sería:

$$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

Ahora, si lo que quisiéramos observar es si el número es par o impar, el espacio muestral sería:

$$\Omega_2 = \{par; impar\}$$

EVENTOS

En un experimento dado podríamos estar interesados no en el espacio muestral, sino solo en una parte de este, es decir, solo en algunos elementos del espacio muestral y estos constituyen un evento. Por lo tanto, un evento es un subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo:
Del ejemplo anterior, lo que ahora nos interesa del experimento son los números múltiplos de 3.
Del espacio muestral que tiene 6 elementos, son 2 los que forman parte de nuestro evento.

$$E = \{3; 6\} \text{ un subconjunto de } \Omega_1$$

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La probabilidad de ocurrencia de un evento que resulta de un experimento aleatorio cualquiera, se evalúa por medio de un conjunto de números reales denominados pesos o probabilidades, que van de 0 a 1. La suma de todos los pesos debe ser 1. La probabilidad de un evento A se simbolizará por P(A).

> La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto:
>
> $0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\varnothing) = 0 \quad \text{y} \quad P(\Omega) = 1$

Ejemplo:
Se lanza dos veces una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra al menos una cara?
El espacio muestral para este experimento:

$$\Omega = \{CC; CS; SC; SS\}$$

Asumimos que cada uno de los resultados tiene la misma probabilidad de ocurrencia. Por tanto, asignamos una probabilidad de W a cada uno de los puntos muestrales. Entonces 4W = 1; o W = 1/4. Si A representa el evento de que ocurra al menos una cara, entonces:

$$A = \{CC; CS; SC\} \text{ y } P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Reglas de adición

Son reglas que nos ayudan a simplificar el cálculo de probabilidades, apartir del conocimiento de las probabilidades de otros eventos. Estas se aplican a la unión de eventos.

1. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
2. Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
3. Si A y A^C son eventos complementarios, entonces:
$$P(A) + P(A^C) = 1$$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A, se llama probabilidad condcional y se denota por P(B/A). El simbolo P(B/A) por lo general se lee: “La probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A” o simplemente “la probabilidad de B, dado A”.

La probabilidad condicional de B, dado A, que se denota con P(B/A), se define como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ si } P(A) > 0$$

Recuerda

Cuando dados dos eventos A y B, la ocurrencia de B no tiene impacto en las probabilidades de ocurrencia de A, entonces decimos que la ocurrencia de A es independiente de la ocurrencia de B.

Luego dos eventos A y B son independientes si y solo si P (B/A) = P(B) y P(A/B) = P(A)

De otra forma A y B son dependientes.

Ejemplo:
El evento B consiste en obtener un cuadrado perfecto cuando lanzamos un dado. Siendo $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, entonces P(B) = 1/3. Supongamos ahora que se sabe que el lanzamiento del dado dio un número mayor a 3. Tenemos un nuevo espacio muestral A = {4; 5; 6} que es un subconjunto de Ω. Dando nuevas probabilidades a los elementos de A, cada elemento tendría de probabilidad 1/3, este evento B/A = {4} y P(B/A) = 1/3.

También podemos escribir:

$$P(B/A) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donde $P(A \cap B)$ y P(A) se encuentran a partir del espacio muestral original Ω.

Regla multiplicativa

1. Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B entonces:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B/A)$$

Teorema:
Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son eventos de un espacio muestral finito y $P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}] \neq 0$, entonces:
$P[A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n] = P[A_1]\, P[A_2 / A_1]\, P[A_3 / A_1 \cap A_2] ... P[A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}]$

2. Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

Ejemplo:
Un pequeño poblado tiene un carro de bomberos y una ambulancia para emergencias. La probabilidad de que el carro de bomberos esté disponible cuando se necesite es 9/10 y la probabilidad de que la ambulancia esté disponible cuando se requiera es 7/10. Calcula la probabilidad de que la ambulancia y el carro de bomberos estén disponibles, si hay un herido en un edificio en llamas.

Resolución:
Llamamos A al evento consistente en que el carro de bomberos esté disponible y B al evento en que la ambulancia esté disponible. Luego:

$P(A) = \frac{9}{10}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{7}{10}$

Nos piden $P(A \cap B)$; como la ocurrencia de A no implica la ocurrencia de B, entonces concluimos que son eventos independientes, por lo tanto:

$$P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$$

Nota

Si A y B son dos eventos independientes, se cumple:

- A y B^C son independientes.
- A^C y B son independientes.
- A^C y B^C son independientes.

EFECTUAR

1. Sean A y B dos eventos independientes, se sabe que la probabilidad de que ocurra al menos uno de dichos eventos es 0,6 y que la probabilidad de que ocurra A es 0,4. Calcula la probabilidad que ocurra B.
2. Si un conejo es inyectado con una droga A la probabilidad que muera dentro de las 24 horas siguientes es de 0,63, y si es inyectado con una droga B dicha probabilidad es de 0,45. ¿Cuál es la probabilidad que un conejo sobreviva más de 24 horas después de haber sido inyectado simultáneamente con las drogas A y B, si se supone que la acción de las mismas son independientes?

Problemas resueltos

1 En una urna se tienen 5 fichas verdes y 4 rojas. Si se extraen 3 al azar, calcula la probabilidad de que sean del mismo color.

Resolución:

El espacio muestral tendrá $C_3^9 = \dfrac{9!}{6! \times 3!} = 84$ elementos.

El evento "que sean del mismo color" se puede dar de $C_3^5 + C_3^4$ formas.

Entonces:

$$P = \frac{C_3^5 + C_3^4}{C_3^9} = \frac{10 + 4}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

2 Se mezclan 5 monedas falsas con 9 auténticas. Si se selecciona al azar 2 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 sean falsas?

Resolución

Dos monedas cualquiera se pueden tomar de C_2^{14} formas, este es el número de elementos del espacio muestral. Que las dos monedas sean falsas se puede dar C_2^5 formas posibles.

Entonces:

$$P = \frac{C_2^5}{C_2^{14}} = \frac{\dfrac{5!}{3! \times 2!}}{\dfrac{14!}{2! \times 12!}} = \frac{10}{91}$$

3 En cierta ciudad, las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. Calcula la probabilidad de que una elegida al azar comience con A y termine en 89.

Resolución:

El espacio muestral tiene $V_2^5 \times V_5^{10}$ elementos y el evento pedido tiene $V_1^4 \times V_3^8$ elementos. Entonces:

$$P = \frac{V_1^4 \times V_3^8}{V_2^5 \times V_5^{10}} = \frac{\dfrac{4!}{3!} \times \dfrac{8!}{5!}}{\dfrac{5!}{3!} \times \dfrac{10!}{5!}} = \frac{1}{450}$$

4 En una cartuchera se tienen 3 lapiceros de color azul, 2 de color rojo y uno de color negro. Si se extraen 2 lapiceros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de diferente color?

Resolución:

En este problema usaremos el concepto de complemento de eventos, ya que el cálculo es más sencillo.
Calculemos la probabilidad de que sean del mismo color.
El espacio muestral tiene C_2^6 elementos y el evento A de que sean del mismo color tiene $C_2^3 + C_2^2 = 4$ elementos.
Entonces:
$P(A) = \dfrac{4}{C_2^6} = \dfrac{4}{15}$, como lo que queremos es el complemento P(A') y P(A) + P(A') = 1, entonces: P(A') = 11/15

5 César tiene 2 monedas cargadas; así, la posibilidad de que salga sello es el triple de que salga cara. Si lanza estas 2 monedas, calcula la probabilidad de que ambas salgan cara.

Resolución:

En este caso observamos que se trata de eventos independientes por lo que podemos usar el teorema: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como la probabilidad de que salga sello es el triple de que salga cara, entonces la probabilidad que ambas salgan cara es 1/4.

Es decir P(A) = 1/4 y P(B) = 1/4.

Entonces la probabilidad que ambas salgan cara es:

$P(A \cap B) = 1/4 \times 1/4 = 1/6$

6 Durante todas las mañanas de enero, Florcita va a la playa 21 días y realiza su deporte favorito, el vóley, por 15 días. Si elige uno de esos días al azar y va a la playa, ¿cuál es la probabilidad de que no realice su deporte favorito?

Resolución:

Es un caso de probabilidad condicional, ya que nos piden la probabilidad de que no juegue vóley cuando ya se dio el evento de que fue a la playa.

Si A es el evento jugar vóley y B el evento ir a la playa, entonces nos piden P(A/B).

Entonces:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/31}{21/31} = \frac{5}{21}$$

Como lo que queremos es la probabilidad de no jugar vóley, entonces hacemos:

$$1 - P(A/B) = \frac{16}{21}$$

7 Juan y Pedro lanzan una pelota a un blanco. La probabilidad de que Juan dé en el blanco es 1/3 y la probabilidad de que Pedro dé en el blanco es 1/4. Supóngase que Juan lanza primero y que los dos chicos se van turnando para lanzar. Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento que dá en el blanco sea el segundo de Juan.

Resolución:

Sean: A = Juan da en el blanco
B = Pedro da en el blanco
P(A) = 1/3; P(B) = 1/4

Además los eventos A y B son independientes; y debe ocurrir que Juan no dé en el blanco en su primer lanzamiento (A'), luego Pedro no acierte (B') y seguidamente Juan acierte (A).

Nos piden: $P(A' \cap B' \cap A) = P(A') \,.\, P(B') \,.\, P(A)$

$$P(A' \cap B' \cap A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

$$P(A' \cap B' \cap A) = \frac{1}{6}$$